C A P Í T U L O V

E Q U I V A L E N C I A

Dos cosas son equivalentes si aunque no sean necesariamente iguales en algún sentido se pueden identificar. Dos copias de un mismo libro se puede decir que son equivalentes.

1. RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Adoptamos ahora la manera de escribir x R y para significar (x, y)$\in R$.

5.1 Definición : Sea R una relación,

(i) R es simétrica sisi $xRy \Rightarrow yRx$

(ii) R es transitiva sisi $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

(iii R es reflexiva en A sisi $\forall x \in A(xRx)$

Ejemplos . Considere las siguientes relaciones, que escribiremos en forma tabular para poderlas estudiar mejor :

R_1	
1	1
2	2
3	3

R_2	
1	1
2	2
3	3
1	2
2	3
3	2
2	1

R_3	
1	1
2	2
3	3
1	2

R_4

ϕ

R_5	
1	1
2	2
3	3
1	2
2	3

R_6	
1	2
2	1

R_7	
1	2

R_8	
1	2
2	3

R_1 tiene las tres propiedades definidas en 5.1 (tomando $A = \{1,2,3\}$).

R_2 es reflexiva en A y simétrica. (Pero no transitiva. En lo que sigue, se entiende que cada relación tiene solamente las propiedades que explícitamente afirmamos que tiene.)

R_3 es reflexiva en A y transitiva.

R_4 es simétrica y transitiva.

R_5 es reflexiva en A.

R_6 es simétrica.

R_7 es transitiva.

R_8 no tiene ninguna de las tres propiedades.

Hay 8 maneras de combinar las tres propiedades; hemos dado un ejemplo de cada una de estas 8 combinaciones. Por lo tanto no hay ninguna implicación posible entre ellas.

Es útil visualizar estas propiedades, por medio de gráficas cartesianas. Recuérdese que hay relaciones que no son susceptibles de ser representadas en estas formas .

La gráfica de una relación reflexiva en *A* contiene la diagonal de *A*.

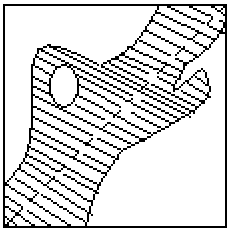


Fig. 45

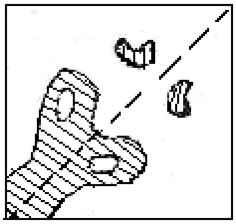


Fig. 46

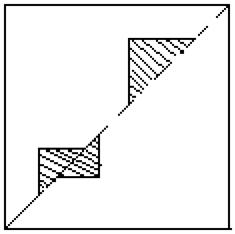


Fig. 47

La gráfica de una relación simétrica es "simétrica" con respecto a la diagonal . Es más difícil decir algo sobre las gráficas de las relaciones transitivas. Solamente diremos que una relación que tiene una apariencia como se muestra en la figura 47, o sea triángulos rectángulos descansando sobre la diagonal y sin que se toquen triángulos de un mismo lado, más pedazos arbitrarios de la diagonal, son gráficas de relaciones transitivas. El recíproco no es cierto. Si lo anterior se ha entendido, es más fácil aceptar la siguiente

5.2 Proposición : (i) R es reflexiva en $A \Leftrightarrow \Delta_A \subseteq R$

(ii) R es simétrica $\Leftrightarrow R = R^{-1}$

(iii) R es transitiva $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$

Demostración : (i) $(\Rightarrow)$ Si x = y , xRy . $(\Leftarrow)$ Como x = x , xRx

(ii)

ELD1

Demostrar:

R es simètrica $\Rightarrow$ R = R^{-1}

(1) P

ELD2

Demostrar:

R = $R^{-1} \Rightarrow$ R es simètrica

(1) P

ELD1

Demostrar:

R es simètrica $\Rightarrow$ R = R^{-1}

(1)	R es simètrica	P
(2)	$(x,y)\in R$	P
(3)	$(y,x)\in R$	I 1,2
(4)	$(x,y)\in R^{-1}$	I. 3,2.13.
(5)	$(x,y)\in R \Rightarrow (x,y)\in R^{-1}$	CP 2,4
(6)	$R\subseteq R^{-1}$	Trad. 5
(7)	$(x,y)\in R^{-1}$	P
(8)	$(y,x)\in R$	I. 7, 2.13
(9)	$(x,y)\in R$	I. 8,1
(10)	$(x,y)\in R^{-1} \Rightarrow (x,y)\in R$	CP 7,9
(11)	$R^{-1}\subseteq R$	traducción 10
(12)	$R\subseteq R^{-1} \wedge R^{-1}\subseteq R$	A 6,11
(13)	R = R^{-1}	I. 12, 1.4(ii)
□(14)	R es simètrica $\Rightarrow$ R = R^{-1}	CP 1,13

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a probar que R = R^{-1}.

(1) Supongamos que R es simètrica. **(2)** Sea $(x,y)\in R$ **.(3)(4)**Por hipótesis $(y,x)\in R$, y por consiguiente $(x,y)\in R^{-1}$ (2.13). **(5)(6)** Por lo tanto,

$$R\subseteq R^{-1} \qquad (\text{ I })$$

(7) Sea ahora $(x,y)\in R^{-1}$ **.(8)**Entonces $(y,x)\in R$ (2.13).**(9)** $(x,y)\in R$ Porque R es simètrica (hipótesis). **(10)(11)**Por lo tanto,

$$R^{-1}\subseteq R \qquad (\text{ II })$$

(12)(13)(14) De (I) y (II) se tiene R = R^{-1} (1.4(ii)).

ELD2
Demostrar:

R = R^{-1} $\Rightarrow$ R es simètrica

(1)	R = R^{-1}	P
(2)	$(x,y)\in R$	P
(3)	$(x,y)\in R^{-1}$	I 1,2
(4)	$(y,x)\in R$	I. 3,2.13
(5)	$(x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R$	CP 2,4
(6)	R es simètrica	Trad. 5
(7)	R = R^{-1} $\Rightarrow$ R es simètrica	CP 1,6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que R es simètrica.

(1) Supongamos que R = R^{-1}. **(2)**Sea $(x,y)\in R$.**(3)(4)**Por hipótesis, $(x,y)\in R^{-1}$ o sea $(y,x)\in R$.**(5)(6)(7)** Pero esto quiere decir que R es simètrica.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar : R es simétrica $\Leftrightarrow$ R = R^{-1}

Supongamos que R es simètrica. Sea $(x,y)\in R$. Por hipótesis $(y,x)\in R$, y por consiguiente $(x,y)\in R^{-1}$ (2.13). De donde

$$R\subseteq R^{-1} \qquad (\text{ I })$$

Sea ahora $(x,y)\in R^{-1}$. Entonces $(y,x)\in R$ (2.13). $(x,y)\in R$ porque R es simètrica (hipótesis). De donde

$$R^{-1}\subseteq R \qquad (\text{ II })$$

De (I) y (II) se tiene R = R^{-1} (1.4(ii)).

Supongamos ahora que R = R^{-1}. Sea $(x,y)\in R$ .Por hipótesis, $(x,y)\in R^{-1}$ o sea $(y,x)\in R$. Pero esto quiere decir que R es simètrica.

(iii)

ELD1	**ELD2**
Demostrar:	**Demostrar:**
R es transitiva $\Rightarrow$ $R \circ R \subseteq R$	$R \circ R \subseteq R \Rightarrow$ R es transitiva
(1) P	(1) P

ELD1

Demostrar:

R es transitiva $\Rightarrow$ $R \circ R \subseteq R$

(1)	R es transitiva	P
(2)	$(x, y) \in R \circ R$	P
(3)	$\exists z : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in R$	I 2,2.14
(4)	$(x, y) \in R$	I. 1,3
(5)	$(x, y) \in R \circ R \ \Rightarrow (x, y) \in R$	CP 2,4
(6)	$R \circ R \subseteq R$	Trad. 5
(7)	R es transitiva $\Rightarrow$ $R \circ R \subseteq R$	CP 1,6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

$\Rightarrow$) Demostremos que $R \circ R \subseteq R$.
(2) Sea $(x, y) \in R \circ R$. **(3)**Entonces existe un $z: (x, z) \in R \wedge (z, y) \in R$ (2.14).
(4) ComoR es transitiva, $(x, y) \in R$. **(5)(6)(7)**Por lo tanto $R \circ R \subseteq R$.

ELD2

Demostrar:

$R \circ R \subseteq R \Rightarrow$ R es transitiva

(1)	$R \circ R \subseteq R$	P
(2)	$(x, z) \in R \wedge (z, y) \in R$	P
(3)	$(x, y) \in R \circ R$	I 2,Def. $\circ$
(4)	$(x, y) \in R$	I. 1,3
(5)	$(x, z) \in R \wedge (z, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in R$	CP 2,4
(6)	R es transitiva	Trad. 5
(7)	$R \circ R \subseteq R \Rightarrow$ R es transitiva	CP 1,6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

$\Leftarrow$) Demostremos que R es transitiva.
(2) Sea $(x, z) \in R \wedge (z, y) \in R$.**(3)** Entonces $(x, y) \in R \circ R$ (2.14). **(4)** Como

$R \circ R \subseteq R$ (hipótesis), entonces $(x, y) \in R$, **(5)(6)(7)** siendo R es transitiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar la proposiciòn : R es transitiva $\Leftrightarrow$ $R \circ R \subseteq R$

$\Rightarrow$) Demostremos $R \circ R \subseteq R$.

Sea $(x, y) \in R \circ R$. Entonces existe un $z: (x, z) \in R \wedge (z, y) \in R$ (Def. $\circ$). Como R es transitiva, $(x, y) \in R$. Por lo tanto $R \circ R \subseteq R$.

$\Leftarrow$) Demostremos ahora que R es transitiva.

Sea $(x, z) \in R \wedge (z, y) \in R$. Entonces $(x, y) \in R \circ R$ (2.14).Como $R \circ R \subseteq R$, por hipótesis, entonces $(x, y) \in R$, demostrándose que R es transitiva.

5.2 Definición : Una relación se dice que es una relación de equivalencia en A sisi es reflexiva en A, simétrica y transitiva.

Si tenemos en cuenta lo dicho sobre gráficas antes de 5.2, podemos pensar en una relación de equivalencia como algo que puede tener una apariencia así:

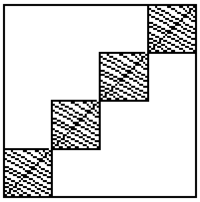


Fig. 48

Cuadros contiguos con algunos de sus bordes, situados a lo largo de la diagonal y que no se intersectan ; los cuadros se pueden reducir a un punto. Pero no toda relación de equivalencia tiene su gráfica en esta forma. (Ejemplo 2 abajo).

Ejemplos : (1) Para todo conjunto A, tanto Δ_A como A^2 son relaciones de equivalencia. Aún más, son respectivamente la mínima y la máxima relación de equivalencia que se pueden definir en A (Ejercicio 5.2(5)).

EJERCICIOS 5.1

1. (i) Δ_A es una relación de equivalencia en *A*.
   (ii) A^2 es una relación de equivalencia en A
   (iii) R es una elación de equivalencia en $A \Rightarrow \Delta_A \subseteq R \subseteq A^2$

2. R simétrica y transitiva $\Leftrightarrow$ $R \circ R^{-1} = R$.

Para los siguientes ejercicios damos las siguientes definiciones :

R es irreflexiva en A $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in A)((x,x) \notin R)$ o sea $x \not R x$.
R es asimétrica $\Leftrightarrow$ $(xRy \Rightarrow y \not R x)$
R es intransitiva $\Leftrightarrow$ $(xRy \wedge yRz \Rightarrow x \not R z)$

Téngase presente que estas propiedades no son las negaciones de reflexiva, simétrica y transitiva.

3. (i) R irreflexiva en A $\Leftrightarrow$ $R \cap \Delta_A = \phi$
(ii) R es asimétrica $\Leftrightarrow$ $R \cap R^{-1} = \phi$.
(iii) R es intransitiva $\Leftrightarrow$ $(R \circ R) \cap R = \phi$.

4. Para cada una de las siguientes relaciones en Z determinar si es reflexiva en Z , transitiva , de equivalencia , irreflexiva en Z , asimétrica , intransitiva :

(a) $R = \{(x,y) / x \, divide \, a \, y\}$
(b) $R = \{(x,y) / x+y \;\; es \; par\}$
(c) $R = \{(x,y) / x+y \;\; es \;\; impar\}$

5. Para cada una de las siguientes relaciones en R, determinar si es reflexiva en R , simétrica , transitiva , de equivalencia , irreflexiva en R , asimétrica , intransitiva.

(a) $R = \{(x,y) / x \leq y\}$
(b) $R = \{(x,y) / x \prec y\}$
(c) $R = \{(x,y) / x \geq y\}$
(d) $R = \{(x,y) / 0 \leq x\,y\}$
(e) $R = \{(x,y) / x+y \leq 2\}$
(f) $R = \{(x,y) / x^2 + y^2 = 4\}$
(g) $R = \{(x,y) / x^2 + y^2 = 0\}$

6. Sea R , S relaciones en A.

(i) R es asimétrica $\Rightarrow$ R es irreflexiva
(ii) R es reflexiva en A $\Rightarrow$ R^{-1} es reflexiva en A
(iii) R, S son reflexivas en A $\Rightarrow$ $R \cup S$ es reflexiva en A.
(iv) R es irreflexiva en A $\Rightarrow$ R^{-1} es irreflexiva en A

(v) R, S son irreflexivas en $A \Rightarrow \; R \cap S$, $R \cup S$, $R - S$ son irreflexivas en A.
(vi) R es simétrica $\Rightarrow \; R^{-1}$ es simétrica .

7. Sea R , S relaciones en A.

(i) R es reflexiva en $A \Rightarrow \; S \subseteq R \circ S \wedge S \subseteq S \circ R$
(ii) R es reflexiva en A y S reflexiva en A y transitiva
$$\Rightarrow \; (R \subseteq S \Rightarrow R \circ S = S)$$

8. Para cada una de las siguientes relaciones R en R^2, R es una relación de equivalencia.

(a) $R = \{((a,b),(c,d)) / c - d = d - b\}$
(b) $R = \{((a,b),(c,d)) / \; a^2 + b^2 = c^2 + d^2\}$
(c) $R = \{((a,b),(c,d)) / \; |a| + |b| = |c| + |d|\}$

9. Sea $\mathscr{L}$ el conjunto de rectas en el plano. // y $\perp$ relaciones en $\mathscr{L}$ tal que:
$// \; = \; \{(l_1, l_2) / l_1 \; paralelo \;\; a \;\; l_2\}, \; \perp \; = \; \{(l_1, l_2) / l_1 \; perpendicular \;\; a \;\; l_2\}$

(a) // es una relación de equivalencia en $\mathscr{L}$.
(b) // $\cup \perp$ es una relación de equivalencia en $\mathscr{L}$.

10. (i) R es relación de equivalencia $\Rightarrow \; R^{-1}$ es relación de equivalencia.
(ii) R es reflexiva en $\overrightarrow{p}_1 R$ y transitiva $\Rightarrow \; R \circ R = R$

11. Sea $(R_i)_{i \in I}$ una familia de relaciones de equivalencia en A.

(i) $\bigcap_{i \in I} R_i$ es una relación de equivalencia en A.
(ii) $\bigcup_{i \in I} R_i$ no es necesariamente una relación de equivalencia .
(iii) Sean R , S relaciones de equivalencia , $R \cup S$ es una relación de equivalencia
$$\Leftrightarrow (R \circ S \subseteq R \cup S \wedge S \circ R \subseteq R \cup S)$$

12. Sean R , S relaciones de equivalencia en A .

$R \circ S$ es una relación de equivalencia en $A \Leftrightarrow R \circ S = S \circ S$

13. Sea R una relación simétrica y reflexiva en A y S , T relaciones en A .

$R \subseteq S \wedge R \subseteq T \Rightarrow R \subseteq S \circ T$.

14. Diremos que una relación en A es circular si xRy $\wedge$ yRz $\Rightarrow$ yRz

(i) R es una relación de equivalencia en A .
(ii) R es reflexiva y circular .
(iii) R es reflexiva en A y triangular .

ACTIVIDAD PRÁCTICA – PROCESO IMITATIVO

1. (i) Δ_A es una relación de equivalencia en A.
   (ii) A^2 es una relación de equivalencia en A
   (iii) R es una elación de equivalencia en $A \Rightarrow \Delta_A \subseteq R \subseteq A^2$

1 (i) **ELD**

Demostrar : Δ_A es de equivalencia en A

Traducción: Δ_A es reflexiva, simétrica y transitiva

	(1)	(x, x)$\in \Delta_A \ \forall x \in A$	2.11
$\square_1$	(2)	Δ_A es reflexiva	1
	(3)	(x, y)$\in \Delta_A$	P
	(4)	x = y	I 3, 2.11
	(5)	(y, x)$\in \Delta_A$	I 3,4
	(6)	(x, y)$\in \Delta_A \Rightarrow$ (y, x)$\in \Delta_A$	CP 3,5
$\square_2$	(7)	Δ_A es simétrica	traducción 6
	(8)	(x, y)$\in \Delta_A \wedge$ (y, z)$\in \Delta_A$	P
	(9)	x = y $\wedge$ y = z	traducción 8
	(10)	x = z	9
	(11)	(x, z)$\in \Delta_A$	I 10, 2.11
	(12)	(x, y)$\in \Delta_A \wedge$ (y, z)$\in \Delta_A \Rightarrow$ (x, z)$\in \Delta_A$	CP 8,11
$\square_3$	(13)	Δ_A es transitiva	traducción 12
	(14)	Δ_A es reflexiva, simétrica y transitiva	2,7,13
$\square$	(15)	Δ_A es de equivalencia	traducción 14

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que Δ_A es una relación de equivalencia.

(1)(x, x)$\in \Delta_A \ \forall x \in A$(2.11). **(2)**Así que Δ_A es reflexiva.
(3) Sea (x, y)$\in \Delta_A$. **(4)**Entonces x = y (2.11) **(5)** y (y, x)$\in \Delta_A$, **(6)(7)**resultando Δ_A simétrica.

(8) Sea ahora (x, y)$\in \Delta_A \wedge$ (y, z)$\in \Delta_A$. **(9)**Entonces x = y$\wedge$ y = z **(10)** de donde x = z **(11)**o sea (x, z)$\in \Delta_A$, **(12)(13)** siendo Δ_A transitiva. **(14)(15)** Por lo tanto Δ_A es relación de equivalencia.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que Δ_A es reflexiva, simétrica y transitiva.

(x, x)$\in \Delta_A \ \forall x \in A$(2.11). Así que Δ_A es reflexiva. Sea (x, y)$\in \Delta_A$. Entonces x = y (2.11) y (y, x)$\in \Delta_A$, resultando Δ_A simétrica.

Sea ahora (x, y)$\in \Delta_A \wedge$ (y, z)$\in \Delta_A$. Entonces x = y $\wedge$ y = z ; de donde x = z o sea (x, z)$\in \Delta_A$, siendo Δ_A es transitiva. Por lo tanto Δ_A es una relación de equivalencia.

1 (ii) A^2 es una relación de equivalencia en A

ELD

Demostrar : A^2 es de equivalencia en A

Traducción: A^2 es reflexiva, simétrica y transitiva

	(1)	(x, x)$\in A^2 \ \forall x \in A$	2.6
$\square_1$	(2)	A^2es reflexiva	1
	(3)	(x, y)$\in A^2$	P
	(4)	$x \in A \wedge y \in A$	I 3, 2.6
	(5)	$y \in A \wedge x \in A$	Cl 4
	(6)	(y, x)$\in A^2$	I 5,2.6
	(7)	(x, y)$\in A^2 \Rightarrow$ (y, x)$\in A^2$	CP 3,6
$\square_2$	(8)	A^2 es simétrica	traducción 7
	(9)	(x, y)$\in A^2 \ \wedge$ (y, z)$\in A^2$	P
	(10)	$x \in A \wedge y \in A \wedge \ y \in A \wedge z \in A$	traducción 8

	(11)	$x \in A \wedge z \in A$	S 10
	(12)	(x, z)$\in A^2$	I 11, 2.6
	(13)	(x, y)$\in A^2 \wedge$ (y, z)$\in A^2 \Rightarrow$ (x, z)$\in A^2$	CP 9,12
$\square_3$	(14)	A^2 es transitiva	traducción 12
	(15)	A^2 es reflexiva, simétrica y transitiva	2,8,13
$\square$	(16)	A^2 es de equivalencia	traducción 14

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que A^2 es una relación de equivalencia en *A*.

(1)(x, x)$\in A^2$ $\forall x \in A$; **(2)**es decir que A^2 es reflexiva.

(3) Sea (x, y)$\in A^2$**.** **(4)** Entonces $x \in A \wedge y \in A$ **(5)** **(6)**o sea $y \in A \wedge x \in A$ es decir (y, x)$\in A^2$. **(7)(8)** Por lo tanto A^2 es simétrica.

(9) Sea ahora (x, y)$\in A^2$ $\wedge$ (y, z)$\in A^2$**.** **(10)(11)**Entonces $x \in A \wedge z \in A$**(12)** o sea (x, z)$\in A^2$, **(13)(14)**lo que comprueba que A^2 es transitiva. **(15)(16)**Por ser reflexiva, simétrica y transitiva, A^2es una relación de equivalencia.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que A^2 es una relación de equivalencia en *A*.

(x, x)$\in A^2$ $\forall x \in A$; es decir que A^2 es reflexiva.

Sea (x, y)$\in A^2$**.** Entonces $x \in A \wedge y \in A$ o sea $y \in A \wedge x \in A$ es decir (y, x)$\in A^2$. Por lo tanto A^2 es simétrica.

Sea ahora (x, y)$\in A^2$ $\wedge$ (y, z)$\in A^2$**.** De donde $x \in A \wedge z \in A$ o sea (x, z)$\in A^2$, lo que comprueba que A^2 es transitiva. Por ser reflexiva, simétrica y transitiva, A^2es una relación de equivalencia.

(iii) *R* es una elación de equivalencia en $A \Rightarrow \Delta_A \subseteq R \subseteq A^2$

ELD

Demostrar : $\Delta_A \subseteq R \subseteq A^2$

(1)	*R* es una elación de equivalencia en *A*	P
(2)	$R \subseteq A \times A$	I 1,2.10

(3)	(x, y) $\in \Delta_A$	P
(4)	x = y	3
(5)	(x, x) $\in$ R $\forall x \in A$	1 (R reflexiva)
(6)	(x, y) $\in$ R	I 4,5
(7)	(x, y) $\in \Delta_A \Rightarrow$ (x, y) $\in$ R	CP 3,6
(8)	$\Delta_A \subseteq R$	traducción 7
(9)	$\Delta_A \subseteq R \wedge R \subseteq A \times A$	A 8,2
□ (10)	$\Delta_A \subseteq R \subseteq A^2$	9

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\Delta_A \subseteq R \subseteq A^2$
(3) Sea (x, y) $\in \Delta_A$. **(4)**Entonces x = y . **(5)**(x, x) $\in R$ $\forall x \in A$ (R es reflexiva) **(6)(7)** **(8)**y por lo tanto (x, y) $\in R$. **(9)** **(10)**Debido a que R es una relación en A, $R \subseteq A \times A$ y $\Delta_A \subseteq R \subseteq A^2$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\Delta_A \subseteq R \subseteq A^2$
Sea (x, y) $\in \Delta_A$. Entonces x = y . (x, x) $\in R$ $\forall x \in A$ (R es reflexiva) y por lo tanto (x, y) $\in R$. Debido a que R es una relación en A, $R \subseteq A \times A$ y $\Delta_A \subseteq R \subseteq A^2$.

2. R simétrica y transitiva $\Leftrightarrow$ $R \circ R^{-1} = R$.

ELD

$\Rightarrow$) **Demostrar :** $R \circ R^{-1} = R$.

Traducción: $(x, y) \in R \circ R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$

(1)	R simétrica y transitiva	P
$\Rightarrow$)(2)	$(x, y) \in R \circ R^{-1}$	P
(3)	$\exists z((x, z) \in R^{-1} \wedge (z, y) \in R$	I 2,2.14
(4)	$(z, x) \in R \wedge (z, y) \in R$	I 3, 2.13
(5)	$(x, z) \in R \wedge (z, y) \in R$	I 4,1 (R simétrica)
(6)	$(x, y) \in R$	I 5,1 (R tr.)
$□_1$ (7)	$(x, y) \in R \circ R^{-1} \Rightarrow (x, y) \in R$	CP 2,6
$\Leftarrow$)(8)	$(x, y) \in R$	P
(9)	$(y, x) \in R$	8,1 (R simétrica)

	(10)	$(y, x) \in R \wedge (x, y) \in R$	A 8,9
	(11)	$(y, y) \in R$	I 10, 1 (R tr.)
	(12)	$(x, y) \in R^{-1}$	I 9,2.13
	(13)	$(x, y) \in R^{-1} \wedge (y, y) \in R$	A 12,11
	(14)	$(x, y) \in R \circ R^{-1}$	I 13,2.14
□$_2$	(15)	$(x, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in R \circ R^{-1}$	CP 8,14
	(16)	$(x, y) \in R \circ R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$	LB 7,15
□	(17)	$R \circ R^{-1} = R$.	traducción 16

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R \circ R^{-1} = R$.

(2) Sea $(x, y) \in R \circ R^{-1}$.**(3)**Entonces existe un z tal que $(x, z) \in R^{-1} \wedge (z, y) \in R$ **(4)**o sea $(z, x) \in R \wedge (z, y) \in R$. **(5)**Como R es simétrica, $(x, z) \in R$ y $(z, y) \in R$, **(6)**y $(x, y) \in R$ (por ser R transitiva), **(7)**cumpliéndose la condicional

$$(x, y) \in R \circ R^{-1} \Rightarrow (x, y) \in R \qquad (\text{I}) .$$

(8) Sea ahora $(x, y) \in R$. **(9)**Como R es simétrica, entonces $(y, x) \in R$, **(10) (11)** y $(y, y) \in R$ (R transitiva) **(12)** y $(x, y) \in R^{-1}$.**(13)**Reordenando lo anterior en la forma $(x, y) \in R^{-1} \wedge (y, y) \in R$, **(14)**se tiene $(x, y) \in R \circ R^{-1}$, **(15)** cumpliéndose la implicación

$$(x, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in R \circ R^{-1} . \qquad (\text{II}) .$$

(16) De (I) y (II) se tiene la equivalencia $(x, y) \in R \circ R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$ **(17)**o sea $R \circ R^{-1} = R$ lo que se quería demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R \circ R^{-1} = R$.

Sea $(x, y) \in R \circ R^{-1}$.
Entonces existe un z tal que $(x, z) \in R^{-1} \wedge (z, y) \in R$ o sea $(z, x) \in R \wedge (z, y) \in R$. Como R es simétrica, $(x, z) \in R$ y $(z, y) \in R$, y $(x, y) \in R$ (por ser R transitiva), cumpliéndose la condicional

$$(x,y)\in R\circ R^{-1} \;\Rightarrow\; (x,y)\in R \qquad (\text{ I }) .$$

Sea ahora $(x,y)\in R$. Como R es simétrica, entonces $(y,x)\in R$, $(y,y)\in R$ (R transitiva) y $(x,y)\in R^{-1}$. Reordenando lo anterior en la forma $(x,y)\in R^{-1}$ y $(y,y)\in R,$ tenemos que $(x,y)\in R\circ R^{-1}$ (2.14), cumpliéndose la implicación

$$(x,y)\in R \;\Rightarrow\; (x,y)\in R\circ R^{-1} \;. \qquad (\text{ II }) .$$

De (I) y (II) se tiene $(x,y)\in R\circ R^{-1} \Leftrightarrow (x,y)\in R$ o sea $R\circ R^{-1}=R$**,** lo que se quería demostrar.

ELD

$\Leftarrow$) **Demostrar :** *R* simétrica y transitiva

	(1)	$R\circ R^{-1}=R$.	P
	(2)	$(x,y)\in R$	P
	(3)	$(x,y)\in R\circ R^{-1}$	I 1,2
	(4)	$\exists z (x,z)\in R^{-1}\wedge (z,y)\in R$	I 3, 2.14
	(5)	$(z,x)\in R\wedge (z,y)\in R$	4
	(6)	$(z,x)\in R\wedge (y,z)\in R^{-1}$	I 5,2.13
	(7)	$(y,z)\in R^{-1} \wedge (z,x)\in R$	Cl 6
	(8)	$(y,x)\in R\circ R^{-1}$	I 7,2.14
	(9)	$(y,x)\in R$	I 8,1
	(10)	$(x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R$	CP 2,9
□$_1$	(11)	*R* es simétrica	traducción 10
	(12)	$(x,y)\in R\wedge (y,z)\in R$	P
	(13)	$(x,y)\in R \wedge (z,y)\in R^{-1}$	I 12,2.13
	(14)	$(y,x)\in R \wedge (z,y)\in R^{-1}$	13,11
	(15)	$(z,y)\in R^{-1} \wedge (y,x)\in R$	Cl 14
	(16)	$(z,x)\in R\circ R^{-1}$	I 15,2.14
	(17)	$(z,x)\in R$	I 16,1
	(18)	$(x,z)\in R$	17,11
	(19)	$(x,y)\in R\wedge (y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R$	CP 12,18
□$_2$	(20)	*R* transitiva	traducción 19
□	(21)	*R* simétrica y transitiva	A 11,20

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que *R* simétrica y transitiva.
(2) Sea $(x,y)\in R$. **(3)**Como $R\circ R^{-1}=R$(hipótesis), $(x,y)\in R\circ R^{-1}$. **(4)**Esto quiere decir que existe un z tal que $(x,z)\in R^{-1}\wedge(z,y)\in R$ (2.14)**(5)(6)(7)**o sea tal que $(y,z)\in R^{-1}\ \wedge\ (z,x)\in R$ (2.13)**(8)**es decir $(y,x)\in R\circ R^{-1}$ (2.14) **(9)(10)(11)**y por lo tanto $(y,x)\in R$ (hipótesis).

(12) Sea ahora $(x,y)\in R\wedge(y,z)\in R$. **(13)**Entonces $(x,y)\in R\ \wedge(z,y)\in R^{-1}$. **(14)(15)(16)**Se acaba de demostrar que R es simétrica, entonces $(y,x)\in R$ y $(z,y)\in R^{-1}$ y $(z,x)\in R\circ R^{-1}$. **(17)**Por hipótesis, $(z,x)\in R$.**(18)** Como R es simétrica, $(x,z)\in R$.**(19) (20)** Así que *R* es transitiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que *R* simétrica y transitiva.

Sea $(x,y)\in R$. Como $R\circ R^{-1}=R$(hipótesis), $(x,y)\in R\circ R^{-1}$. Esto quiere decir que existe un z tal que $(x,z)\in R^{-1}\wedge(z,y)\in R$ o sea tal que $(y,z)\in R^{-1}\ \wedge\ (z,x)\in R$ es decir $(y,x)\in R\circ R^{-1}$ (2.14) y por lo tanto $(y,x)\in R$ (hipótesis).

Sea ahora $(x,y)\in R\wedge(y,z)\in R$. Entonces $(x,y)\in R\ \wedge(z,y)\in R^{-1}$. Se acaba de demostrar que R es simétrica, entonces $(y,x)\in R\ \wedge(z,y)\in R^{-1}$ y $(z,x)\in R\circ R^{-1}$. Por hipótesis, $(z,x)\in R$. Como R es simétrica, $(x,z)\in R$. Así que *R* es transitiva.

3. (i) *R* irreflexiva en A $\Leftrightarrow$ $R\cap\Delta_A=\phi$

ELD

$\Rightarrow$) **Demostrar : $\mathbf{R}\cap\boldsymbol{\Delta}_A=\phi$**

Por RAA

(1)	*R* irreflexiva	P
(2)	$R\cap\Delta_A\neq\phi$	P
(3)	$\exists(x,y)\in R\cap\Delta_A$	I 2,1.6 (ii)
(4)	$(x,y)\in R\wedge(x,y)\in\Delta_A$	3
(5)	$(x,y)\in R$	S 4

(6)	$(x,y)\in\Delta_A$	S 4
(7)	x = y	6
(8)	$(x,x)\in R$	I 5,7
(9)	$(x,x)\notin R$	traducción 1
(10)	$(x,x)\in R \wedge (x,x)\notin R$	A 8,9
□ (11)	$R\cap\Delta_A=\phi$	RAA2,10

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R\cap\Delta_A=\phi$. Por RAA:

(2) Supongamos lo contrario : $R\cap\Delta_A\neq\phi$. **(3)**Entonces existe $(x,y)\in R\cap\Delta_A$ (1.6(ii)) **(6)**o sea $(x,y)\in R$ y $(x,y)\in\Delta_A$. **(5)(6)**En particular $(x,y)\in\Delta_A$, **(7)**o sea x = y , **(8)** y $(x,x)\in R$. **(9)**Pero $(x,x)\notin R$ (*R* es irreflexiva, por hipótesis). **(10) (11)**Por lo tanto $R\cap\Delta_A=\phi$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R\cap\Delta_A=\phi$. Por RAA:
Supongamos lo contrario : $R\cap\Delta_A\neq\phi$. Entonces existe $(x,y)\in R\cap\Delta_A$ (1.6(ii)) o sea $(x,y)\in R$ y $(x,y)\in\Delta_A$. En particular $(x,y)\in\Delta_A$, o sea x = y , y $(x,x)\in R$. Pero $(x,x)\notin R$ (*R* es irreflexiva, por hipótesis). Por lo tanto $R\cap\Delta_A=\phi$.

3.(i) $\Leftarrow$) **ELD**

Demostrar : R irreflexiva en A

Traducción : $(x,x)\notin R \quad \forall x\in A$

Por RAA

(1)	$R\cap\Delta_A=\phi$	P
(2)	$(x,x)\in R \quad \forall x\in A$	P
(3)	$(x,x)\in\Delta_A \quad \forall x\in A$	P
(4)	$(x,x)\in R \wedge (x,x)\in\Delta_A$	A 2,3
(5)	$(x,x)\in R\cap\Delta_A$	4
(6)	$R\cap\Delta_A\neq\phi$	I 5,1.6(ii)
(7)	$R\cap\Delta_A=\phi \wedge R\cap\Delta_A\neq\phi$	A 1,6
(8)	$(x,x)\notin R \ \forall x\in A$	RAA 2,7
□ (9)	*R* es irreflexiva	traducción 8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que R es irreflexiva en A. Por RAA:

(2) Supongamos lo contrario; es decir, $(x,x)\in R \quad \forall x\in A$. **(3)** **(4)**Como $(x,x)\in \Delta_A$ $\forall x\in A$, entonces se tiene que $(x,x)\in R \wedge (x,x)\in \Delta_A$ **(5)(6)** o sea $R\cap\Delta_A \neq \phi$ **.(7)**Pero esto contradice la hipótesis de que $R\cap\Delta_A=\phi$ **.(8)(9)**Por lo tanto $(x,x)\notin R \quad \forall x\in A$ es decir que R es irreflexiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que R es irreflexiva en A. Por RAA:

Supongamos lo contrario; es decir, $(x,x)\in R \quad \forall x\in A$. Como $(x,x)\in \Delta_A$ $\forall x\in A$, entonces se tiene que $(x,x)\in R \wedge (x,x)\in \Delta_A$ o sea $R\cap\Delta_A \neq \phi$. Pero esto contradice la hipótesis de que $R\cap\Delta_A=\phi$. Por lo tanto $(x,x)\notin R \quad \forall x\in A$ es decir que R es irreflexiva.

3. (ii) R es asimétrica $\Leftrightarrow R\cap R^{-1}=\phi$.

ELD

$\Rightarrow$) **Demostrar :** $R\cap R^{-1}=\phi$.

Por RAA

(1)	R es asimétrica	P
(2)	$R\cap R^{-1}\neq\phi$.	P
(3)	$\exists\ (x,y)\in R\cap R^{-1}$.	I 2,1.6(ii)
(4)	$(x,y)\in R \wedge (x,y)\in R^{-1}$	3
(5)	$(x,y)\in R$	S 4
(6)	$(x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\notin R$	traducción 1
(7)	$(y,x)\notin R$	PP 5,6
(8)	$(x,y)\in R^{-1}$	S 4
(9)	$(y,x)\in R$	I 8,2.13
(10)	$(y,x)\in R \wedge (y,x)\notin R$	A 9,7
□ (11)	$R\cap R^{-1}=\phi$.	RAA 2,10

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R\cap R^{-1}=\phi$. Por RAA:

(2) Supongamos lo contrario; es decir, $R \cap R^{-1} \neq \phi$.**(3)(4)**Entonces existe $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ o sea $(x, y) \in R$ y $(x, y) \in R^{-1}$. **(5)(6)(7)(8)(9)**De esta conjunción se desprende que $(y, x) \notin R$, por ser R asimétrica, y $(y, x) \in R$ (2.13); **(10)(11)**lo cual evidentemente es una contradicción, luego $R \cap R^{-1} = \phi$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R \cap R^{-1} = \phi$. Por RAA:

Supongamos lo contrario; es decir, $R \cap R^{-1} \neq \phi$ .Entonces existe $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ o sea $(x, y) \in R$ y $(x, y) \in R^{-1}$. De esta conjunción se desprende que $(y, x) \notin R$, por ser R asimétrica, y $(y, x) \in R$ (2.13); lo cual evidentemente es una contradicción, luego $R \cap R^{-1} = \phi$.

3. (ii) **ELD**

$\Leftarrow$) **Demostrar : *R* es asimétrica**

Traducción : $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$

(1)	$R \cap R^{-1} = \phi$.	P
(2)	$(x, y) \in R$	P
(3)	$(x, y) \notin R^{-1}$	1,2
(4)	$(y, x) \notin R$	3
(5)	$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$	CP 2,4
□ (6)	R es asimétrica	traducción 5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que *R* es asimétrica.

(2) Sea $(x, y) \in R$. **(3)(4)** Como $R \cap R^{-1} = \phi$ por hipótesis, $(x, y) \notin R^{-1}$ o sea $(y, x) \notin R$. **(5)(6)**Luego R es asimétrica.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que *R* es asimétrica.
Sea $(x, y) \in R$. Como $R \cap R^{-1} = \phi$ por hipótesis, $(x, y) \notin R^{-1}$ o sea $(y, x) \notin R$. Luego R es asimétrica.

3. (iii) R es intransitiva $\Leftrightarrow (R \circ R) \cap R = \phi$.

ELD

$\Rightarrow$) **Demostrar :** $(R \circ R) \cap R = \phi$.

Por RAA

(1)	R es intransitiva	P
(2)	$(R \circ R) \cap R \neq \phi$	P
(3)	$\exists\ (x, y) \in (R \circ R) \cap R$	I 2,1.6(ii)
(4)	$(x, y) \in R \circ R \wedge (x, y) \in R$	3
(5)	$(x, y) \in R \circ R$	S 4
(6)	$\exists z((x, z) \in R \wedge (z, y) \in R)$	traducción 5
(7)	$((x, z) \in R \wedge (z, y) \in R) \Rightarrow (x, y) \notin R$	traducción 1
(8)	$(x, y) \notin R$	PP 6,7
(9)	$(x, y) \in R$	S 4
(10)	$(x, y) \in R \wedge (x, y) \notin R$	A 9,8
□ (11)	$(R \circ R) \cap R = \phi$.	RAA 2,10

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $(R \circ R) \cap R = \phi$. Por RAA:

(2) Supongamos lo contrario; es decir, $(R \circ R) \cap R \neq \phi$. **(3)**Entonces existe $(x, y) \in (R \circ R) \cap R$, **(4)**es decir, $(x, y) \in R \circ R$ y $(x, y) \in R$; **(5)(6)**de lo primero se desprende que existe un z tal que $(x, z) \in R \wedge (z, y) \in R$. **(7)(8)**Como R es intransitiva, por hipótesis, $(x, y) \notin R$. **(9)(10)**Pero esto contradice que $(x, y) \in R$. **(11)**Luego $(R \circ R) \cap R = \phi$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $(R \circ R) \cap R = \phi$. Por RAA:

Supongamos lo contrario; es decir, $(R \circ R) \cap R \neq \phi$.
Entonces existe $(x, y) \in (R \circ R) \cap R$, es decir, $(x, y) \in R \circ R$ y $(x, y) \in R$;
de lo primero se desprende que existe un z tal que $(x, z) \in R \wedge (z, y) \in R$.
Como R es intransitiva, por hipótesis, $(x, y) \notin R$ .Pero esto contradice que $(x, y) \in R$. Luego $(R \circ R) \cap R = \phi$.

3.(iii) $\Leftarrow$)

ELD

Demostrar : *R* es intransitiva

Traducción : $(x,y)\in R\wedge(y,z)\in R\Rightarrow\ (x,z)\notin R$

(1)	$(R\circ R)\cap R=\phi$.	P
(2)	$(x,y)\in R\wedge(y,z)\in R$	P
(3)	$(y,z)\in R$	S 2
(4)	$(y,z)\notin R\circ R$	3,1
(5)	$(x,y)\notin R\circ R$	2,1
(6)	$\forall z((x,z)\notin R\vee(z,y)\notin R)$	traducción 5
(7)	$(x,z)\notin R$	TP 3,7
(8)	$(x,y)\in R\wedge(y,z)\in R\Rightarrow\ (x,z)\notin R$	CP 2,7
□ (9)	R intransitiva	traducción 8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que R intransitiva.

(2) Supongamos que $(x,y)\in R$ y $(y,z)\in R$.**(3)(4)(5)**Debido a que por Hipótesis $(R\circ R)\cap R=\phi$, entonces $(y,z)\notin R\circ R$ y $(x,y)\notin R\circ R$. **(6)**Esto último quiere decir que $\forall z((x,z)\notin R\vee(z,y)\notin R)$.**(7)(8)(9)**Hemos supuesto que $(y,z)\in R$, por lo tanto $(x,z)\notin R$, que era lo que se quería demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que R intransitiva.

Sea $(x,y)\in R$ y $(y,z)\in R$.

Debido a que por hipótesis $(R\circ R)\cap R=\phi$, $(y,z)\notin R\circ R$ y $(x,y)\notin R\circ R$.

Esto último quiere decir que $\forall z((x,z)\notin R\vee(z,y)\notin R)$ .Hemos supuesto que $(y,z)\in R$, por lo tanto $(x,z)\notin R$, que era lo que se quería demostrar.

4 (a) $R=\{(x,y)/\,x\,divide\,a\,y\}$

$(x,y)\in R\Leftrightarrow$ x divide a y

Es R reflexiva?

Si: $(x,x)\in R\ \forall x$: x divide a x.

Simétrica?

No: x divide a y no implica que y divide a x.

Transitiva?

Sí: $(x,y)\in R\wedge(y,z)\ \Rightarrow\ (x,z)\in R$

ELD

Demostrar : x divide a z

Traducción : $\exists k \in Z : z = xk$

(1)	x divide a y	P
(2)	y divide a z	P
(3)	$\exists n \in Z : y = xn$	traducción 1
(4)	$\exists m \in Z : z = ym$	traducción 2
(5)	$z = (xn)m$	I 3,4
(6)	$z = x(nm)$	5
(7)	$k = nm$	P
(8)	$z = xk$	I 6,7
□ (9)	x divide a z	traducción 8
(10)	R es transitiva	1,2,9

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R = \{(x, y) / x\, divide\, a\, y\}$ es transitiva.
(1)(2) Supongamos que x divide a y y y divide a z . **(3)(4)** Entonces existen n y m enteros tales que $y = xn$ y $z = ym$. **(5) (6)**De donde $z = (xn)m$ y $z = x(nm)$.**(7)** Haciendo $k = nm$, **(8) (9)(10)**se tiene $z = xk$ o sea x divide a z .

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R = \{(x, y) / x\, divide\, a\, y\}$ es transitiva.

Supongamos

x divide a y y y divide a z .

Entonces

$y = xn$ y $z = ym$ $\quad p.a.\ n,m \in Z$

De donde

$z = (xn)m$ y $z = x(nm)$.

Haciendo

$k = nm,$

se tiene

$z = xk$

o sea

x divide a z .

R es relación de equivalencia? No, porque falla en la propiedad simétrica.

Es irreflexiva? No. Es falso que x no divida a x.
Es asimétrica? Sí: si x divide a y, entonces y no divide a x.
Es intransitiva? No. Por ejemplo, si 3 divide a 6 y 6 divide a 12, esto no implica que 3 no divida a 12.

$(b)\quad R=\{(x,y)/\,x+y\ \ es\ par\};\qquad (x,y)\in R \Leftrightarrow x+y\ es\ \ par$

Es reflexiva? Sí, porque x + x = 2x es par.
Simétrica? Sí: $(x,y)\in R \Leftrightarrow x+y\ es\ \ par$

$$\Rightarrow\ \ y+x\ es\ \ par$$
$$\Rightarrow\ \ (y,x)\in R$$

Transitiva? Sí. $(x,y)\in R \wedge (y,z)\in R \Rightarrow\ (x,z)\in R$

ELD

Demostrar : $(x,z)\in R$

Traducción : x + z es par

(1)	$(x,y)\in R$	P
(2)	$(y,z)\in R$	P
(3)	x + y = 2k p.a.k$\in Z$	traducción 1
(4)	y + z = 2q p.a.q$\in Z$	traducción 2
(5)	x = 2k – y	3
(6)	z = 2q – y	4
(7)	x + z = 2k + 2q –2y	5,6
(8)	x + z = 2(k + q –y)	7
(9)	m = k + q –y	P
(10)	x + z = 2m	9
(11)	x + z es par	10
(12)	$(x,z)\in R$	11
(13)	R es transitiva	1,2,12

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que R es transitiva.

(1)(2) Supongamos que $(x,y)\in R$ y $(y,z)\in R$ **(3)(4)**o sea que $x + y$ = 2k para algún k$\in Z$ y $y + z = 2q$ para algún q$\in Z$. **(5)(6)** Entonces $x = 2k – y$ y z = 2q – y , por lo tanto**(7)(8)** $x + z = 2(k + q –y)$. **(9)**Haciendo m = k + q –y, **(10)**se tiene que x + z = 2m, **(11)**o sea que $x + z$ es par **(12)**y $(x,z)\in R$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que *R* es transitiva.

Supongamos

$$(x, y) \in R \ \text{ y } \ (y, z) \in R$$

o sea

$$x + y = 2\text{k} \quad p.\ a.\ k \in Z \ \wedge \ y + z = 2q \quad p.a.\ q \in Z\ .$$

Entonces

$$x = 2k - y \quad \text{y} \quad \text{z} = 2\text{q} - \text{y}\ ,$$

y por lo tanto

$$x + z = 2(k + q - y).$$

Haciendo

$$m = k + q - y,$$

se tiene

$$x + z = 2m.$$

Es decir que $x + z$ es par y por lo tanto $(x, z) \in R$.

Es relación de equivalencia? Sí, porque es reflexiva, simétrica y transitiva.
No es irreflexiva ni asimétrica ni transitiva. Por ejemplo, es falso que x + x no sea par. Si x + y es par, es falso que y + x no sea par.

(c) $R = \{(x, y) / x + y \ \ es\ impar\}$

$(x, y) \in R \Leftrightarrow x + y\ es\ impar$

Es reflexiva? No. $(x, x) \in R \Leftrightarrow x + x = 2x\ es\ impar$

Es simétrica? Sí: $(x, y) \in R \Leftrightarrow x + y\ es\ impar$

$$\Rightarrow y + x\ es\ impar$$

$$\Rightarrow (y, x) \in R$$

Es transitiva? No. $(8,3) \in R \wedge (3,2) \in R$ pero $(8,2) \notin R$

Es irrelexiva? Sí: $(x, x) \notin R \Leftrightarrow x + x\ no\,es\ impar$

Es asimétrica? No. Si x + y es impar, es falso que y + x no sea impar.

Es intransitiva? Sí. $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow \ (x, z) \notin R$

ELD

Demostrar : $(x, z) \notin R$

Traducción : x + z no es impar

(1)	$(x, y) \in R$	P
(2)	$(y, z) \in R$	P

(3)	x + y es impar	traducción 1
(4)	y + z es impar	traducción 2
(5)	x + y = 2k + 1 p.a. k$\in Z$ $\wedge$ x + z = 2n + 1 p.a. n$\in Z$	trad. 3,4
(6)	x = 2k + 1 – y $\wedge$ z = 2n + 1 – y	5
(7)	x + z = 2k + 2n + 2 – 2y	6
(8)	x + z = 2(k + n –y)	7
(9)	m = k + n –y	P
(10)	x + z = 2m	I 8,9
(11)	x + z es par	traducción 10
(12)	x + z no es impar	11
(13)	$(x,z)\notin R$	traducción 12
(14)	$(x,y)\in R\ \wedge (y,z)\in R\ \Rightarrow\ (x,z)\notin R$	CP (1$\wedge$2),13
(15)	R es intransitiva	traducción 14

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R=\{(x,y)/\,x+y\ \ es\ impar\}$ es intransitiva.

(1)(2) Supongamos que $(x,y)\in R$ y $(y,z)\in R$, **(3)(4)**es decir que $x + y$ y $y + z$ son impares. **(5)(6)** Entonces existen enteros k y n tales que

$$x = 2k + 1 - y \quad \text{y} \quad z = 2n + 1 - y\,;$$

(7)(8) de donde

$$x + z = 2(k + n - y).$$

(9) Haciendo m = k + n –y, **(10)**se tiene que x + z = 2m , **(11)** es decir que x + z es par, **(12)**o sea que x + z no es impar . **(13) (14)(15)**De donde se concluye que R es intransitiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R=\{(x,y)/\,x+y\ \ es\ impar\}$ es intransitiva.

Supongamos que

$$(x,y)\in R \text{ y } (y,z)\in R,$$

es decir que

$$x + y \text{ es impar y } y + z \text{ es impar .}$$

Entonces

$$x + y = 2k + 1 \quad \text{y} \quad y + z = 2n + 1 \ \ p.a.\ k,n\in Z\,.$$

De donde

$$x = 2k + 1 - y \quad \text{y} \quad z = 2n + 1 - y$$

y

$$x + z = 2(k + n - y).$$

Haciendo $m = k + n - y$, se tiene que $x + z = 2m$, es decir que $x + z$ es par; En otras palabras que $x + z$ no es impar .De donde se concluye que R es intransitiva.

.

5. (a) $R = \{(x,y)/x \leq y\}$ $(x,y) \in R \Leftrightarrow x \leq y$

Es reflexiva? Sí: $(x,x) \in R \Leftrightarrow x \leq x \ \forall x$

Es simétrica? No:

$$(x,y) \in R \text{ no implica } (y,x) \in R$$
$$x \leq y \text{ no implica } y \leq x$$

Es transitiva? Sí : $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Es de equivalencia? No. Falla la propiedad simétrica.

Es irreflexiva? No. Es falso que $(x,x) \notin R$ es decir $x \nleq x$

Es asimétrica? Sí: $x \leq y \Rightarrow y \nleq x$

Es intransitiva? No.

$$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \text{ no implica } (x,z) \notin R$$
$$x \leq y \wedge y \leq z \not\Rightarrow x \nleq z$$

(b) $R = \{(x,y)/x < y\}$

$(x,y) \in R \Leftrightarrow x < y$

Es reflexiva? No: $(x,x) \notin R \Leftrightarrow x \nless x \ \forall x$

Es simétrica? No:

$$(x,y) \in R \text{ no implica } (y,x) \in R$$
$$x < y \text{ no implica } y < x$$

Es transitiva? Sí : $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$

Es de equivalencia? No. Falla la propiedad simétrica.

Es irreflexiva? No. Es falso que $(x,x) \notin R$ es decir $x \nless x$

Es asimétrica? Sí: $x < y \Rightarrow y \nless x$

Es intransitiva? No. $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R$ no implica $(x,z) \notin R$

(c) $R = \{(x,y)/x \geq y\}$ Es lo mismo que (a).

(d) $R = \{(x,y)/0 \leq xy\}$ $(x,y) \in R \Leftrightarrow 0 \leq xy$

Es reflexiva? Sí: $(x,x) \in R \Leftrightarrow 0 \le x\,x \ \forall x, \ o\,sea\,(x,x) \in R$

Es simétrica? Sí: $(x,y) \in R \Rightarrow 0 \le xy$

$\Rightarrow 0 \le yx$

$\Rightarrow (y,x) \in R$

Es transitiva? Sí: $0 \le xy \ \wedge 0 \le y\,z \ \Rightarrow$ x, y, z tienen el mismo signo

$\Rightarrow$ x, z tienen el mismo signo

$\Rightarrow 0 \le x\,z$

Es de equivalencia? Sí, porque es reflexiva, simétrica y transitiva.

Es irreflexiva? No. Es falso que $0 \nleq xx \ \ \forall x$

Es asimétrica? No: $0 \le xy \ \not\Rightarrow \ 0 \nleq yx$

Es intransitiva? No: $0 \le xy \ \wedge 0 \le y\,z \ \not\Rightarrow \ 0 \nleq x\,z$

(e) $R = \{(x,y)/x+y \le 2\}$

$(x,y) \in R \ \Leftrightarrow \ x+y \le 2$

Es reflexiva? No: $x+x \nleq 2 \ \forall x$

Es simétrica? Sí: $x+y \le 2 \Rightarrow \ y+x \le 2$

Es transitiva? $x+y \le 2 \ \wedge \ y+z \le 2 \ \Rightarrow \ x+z \le 2$?

No: $1.5+0.4 \le 2 \wedge 0.4+1.2 \le 2$ pero $1.5+1.2 \nleq 2$

Es de equivalencia? No. Por qué?

Es irreflexiva? Sí : $x+x \nleq 2 \ \forall x$

Es intransitiva? No: $x+y \le 2 \ \wedge \ y+z \le 2 \ \not\Rightarrow \ x+z \nleq 2$

Es asimétrica? No: $x+y \le 2 \ \not\Rightarrow \ \ y+x \nleq 2$

(f) $R = \{(x,y)/x^2+y^2 = 4\}$; $(x,y) \in R \Leftrightarrow x^2+y^2 = 4$

Es reflexiva? No. Es falso que $(x,x) \in R \ \forall x$. Por ejemplo, $1^2+1^2 \ne 4$

Es simétrica? Sí. $x^2+y^2 = 4 \Rightarrow y^2+x^2 = 4$

Es transitiva? Sí. $x^2+y^2 = 4 \ \wedge \ y^2+z^2 = 4 \ \Rightarrow \ x^2+z^2 = 4$?

ELD

Demostrar : *R* es transitiva

traducción $x^2+y^2 = 4 \ \wedge \ y^2+z^2 = 4 \ \Rightarrow \ x^2+z^2 = 4$

(1)	$x^2+y^2 = 4 \ \wedge \ y^2+z^2 = 4$	P
(2)	$y^2+z^2 = 4$	S1
(3)	$x^2+z^2 = 4$	*x/y* 2
(4)	$x^2+y^2 = 4 \ \wedge \ y^2+z^2 = 4 \ \Rightarrow \ x^2+z^2 = 4$	CP 1,3
(5)	*R* es transitiva	Traducción 4

Es irreflexiva? No. Es falso que $(x,x) \notin R\ \forall x$. Por ejemplo, $(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4$.

(g) $R = \left\{(x,y) / x^2 + y^2 = 0\right\}$; $(x,y) \in R \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0$

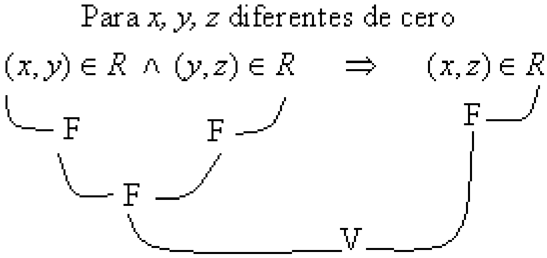
Es reflexiva? No. $x^2 + x^2 \neq 0\ \forall x \neq 0$.

Es simétrica? Sí. $(x,y) \in R \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$

$$\Rightarrow y^2 + x^2 = 0$$
$$\Rightarrow (y,x) \in R$$

Es transitiva? $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

$R = \{(0,0)\}$ es transitiva.



El condicional es verdadero, por lo tanto R es transitiva.

No es de equivalencia porque falla la propiedad reflexiva.

Es irreflexiva : $(x,x) \notin R\ \forall x$, ya que $x^2 + x^2 \neq 0\ \forall x \neq 0$.

No es intransitiva : $x^2 + y^2 = 0 \wedge y^2 + z^2 = 0 \not\Rightarrow x^2 + y^2 \neq 0$

No es asimétrica : $x^2 + y^2 = 0 \not\Rightarrow y^2 + z^2 \neq 0$

6. Sea R , S relaciones en A.

(i) R es asimétrica $\Rightarrow$ R es irreflexiva

ELD

Demostrar : *R* es irreflexiva

Traducción : $(x,x) \notin R\ \forall x \in A$ Por RAA

(1)	***R* , *S* relaciones en A**	**P**
(2)	***R* es asimétrica**	**P**
(3)	$(x,x) \in R\ \forall x \in A$	P
(4)	$(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R$	traducción 2
(5)	$(x,x) \in R \Rightarrow (x,x) \notin R$	x/y 3

(6)	$(x,x) \notin R$	PP 3,5
(7)	$(x,x) \in R \wedge (x,x) \notin R$	A 3,6
(8) $(x,x) \notin R$		RAA 3,7
□ (9) R es irreflexiva		traducción 7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que R es irreflexiva. Por RAA:

(3) Supongamos lo contrario; es decir, $(x,x) \in R\ \forall x \in A$. **(4)** Debido a que R es asimétrica, para $(x,y) \in R$ se tiene que $(y,x) \notin R\ \forall x \forall y$. **(5)** **(6)**Especificando x para y en este último resultado se tiene que $(x,x) \notin R$. **(7)**Pero esto contradice el supuesto de que $(x,x) \in R$. **(8)** **(9)**Luego $(x,x) \notin R$, es decir R es irreflexiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que R es irreflexiva. Por RAA:

Supongamos lo contrario; es decir, $(x,x) \in R\ \forall x \in A$. Debido a que R es asimétrica, para $(x,y) \in R$ se tiene que $(y,x) \notin R\ \forall x \forall y$. Especificando x para y en este último resultado se tiene que $(x,x) \notin R$. Pero esto contradice el supuesto de que $(x,x) \in R$. Luego $(x,x) \notin R$, es decir R es irreflexiva.

6. Sea R , S relaciones en A.

(ii) R es reflexiva en $A \Rightarrow$ R^{-1} es reflexiva en A

ELD

Demostrar R^{-1} es reflexiva en A

Traducción : $(x,x) \in R^{-1}\ \forall x \in A$

(1) R , S relaciones en A		**P**
(2) R es reflexiva en A		**P**
(3)	$(x,x) \in R\ \forall x \in A$	2
(4)	$(x,x) \in R^{-1}\ \forall x \in A$	I 3,2.13
□(5) R^{-1} es reflexiva en A		traducción 4

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2)(3) Por la segunda hipótesis $(x,x)\in R\ \forall x\in A$.**(4)** Por (2.13), $(x,x)\in R^{-1}\ \forall x\in A$, **(5)**es decir R^{-1} es reflexiva en *A.*

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Por la segunda hipótesis $(x,x)\in R\ \forall x\in A$. Por (2.13), $(x,x)\in R^{-1}\ \forall x\in A$, es decir R^{-1} es reflexiva en *A.*

6. Sea R , S relaciones en A.

(iii) R, S son reflexivas en $A \Rightarrow R\cup S$ es reflexiva en *A.*

ELD

Demostrar : $R\cup S$ es reflexiva en *A.*

Traducción : $(x,x)\in R\cup S\ \ \forall x\in A$

(1)	***R* , *S* relaciones reflexivas en A**	**P**
(2)	$(x,x)\in R \wedge (x,x)\in S\ \forall x\in A$	1
(3)	$(x,x)\in R \vee (x,x)\in S\ \forall x\in A$	2
(4)	$(x,x)\in R\cup S\ \forall x\in A$	3
□(5)	$R\cup S$ es reflexiva en A	traducción 4

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R\cup S$ es reflexiva en *A.*

(1)(2) Debido a que R y S relaciones reflexivas en A (hipótesis), entonces $(x,x)\in R$ y $(x,x)\in S\ \ \forall x\in A$; **(3)(4)(5)**de donde $(x,x)\in R\cup S\ \forall x\in A$ y por lo tanto $R\cup S$ es reflexiva en *A.*

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R\cup S$ es reflexiva en *A.*

Debido a que R y S relaciones reflexivas en A (hipótesis), entonces $(x,x)\in R$ y $(x,x)\in S\ \ \forall x\in A$; de donde $(x,x)\in R\cup S\ \forall x\in A$ y por lo tanto $R\cup S$ es reflexiva en *A.*

6. Sea R , S relaciones en A. (iv) R es irreflexiva en $A \Rightarrow R^{-1}$ es irreflexiva en A

ELD

Demostrar : R^{-1} es irreflexiva en A

Traducción : $(x,x) \notin R^{-1} \ \forall x \in A$

	(1) ***R* , *S* relaciones en A**	**P**
	(2) ***R* es irreflexiva en *A***	**P**
	(3) $(x,x) \notin R \ \forall x \in A$	2
	(4) $(x,x) \notin R^{-1} \ \forall x \in A$	3
□	(5) R^{-1} es irreflexiva en A	traducción 4

6. Sea R , S relaciones en A.

(v) R, S son irreflexivas en $A \Rightarrow R \cap S$, $R \cup S$, $R - S$ son irreflexivas en A.

ELD

Demostrar : $\boldsymbol{R \cap S}$ **,** $\boldsymbol{R \cup S}$ **,** $R - S$ **son irreflexivas en** $\boldsymbol{A}$

	(1) ***R, S* son irreflexivas en *A***	**P**
	(2) $(x,x) \notin R \ \wedge \ (x,x) \notin S \quad \forall x \in A$	1
	(3) $(x,x) \notin R \cap S \quad \forall x \in A$	2
$□_1$	(4) $R \cap S$ es irreflexiva en A	traducción 3
	(5) $\neg(\,(x,x) \in R \vee (x,x) \in S\,)$	DL 2
	(6) $\neg(\,(x,x) \in R \cup S)$	5
	(7) $(x,x) \notin R \cup S \quad \forall x \in A$	6
$□_2$	(8) $R \cup S$ es irreflexiva en A	traducción7
	(9) $(x,x) \notin R$	1 (R irrefl.)
	(10) $(x,x) \in R'$	9
	(11) $(x,x) \in R' \vee (x,x) \in S$	LA 10
	(12) $(x,x) \in R' \cup S$	11
	(13) $R' \cup S = (R \cap S')'$	P
	(14) $(x,x) \in (R \cap S')'$	I 12,13
	(15) $(x,x) \notin R \cap S'$	14
	(16) $R \cap S' = R - S$	P
	(17) $(x,x) \notin R - S$	I 15,16
$□_3$	(18) $R - S$ es irreflexiva	17
□	(19) $R \cap S$, $R \cup S$, $R - S$ son irreflexivas en A	4,8,18

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R \cap S$, $R \cup S$, $R - S$ son irreflexivas en *A.*

(2) $(x,x) \notin R \wedge (x,x) \notin S \;\; \forall x \in A$ (hipótesis).**(3)(4)**Esto implica que $(x,x) \notin R \cap S$ o sea que $R \cap S$ es irreflexiva en A . **(5)**Aplicando la ley D'Morgan a la hipótesis se tiene $\neg((x,x) \in R \vee (x,x) \in S)$ **(6)** **(7)**esto es $(x,x) \notin R \cup S \;\; \forall x \in A$ **(8)** es decir que $R \cup S$ es irreflexiva en A .

(9) Por otra parte $(x,x) \notin R$ **(10)**o sea $(x,x) \in R'$, debido a que *R* es irreflexiva en *A.* **(11)(12)**Es evidente que $(x,x) \in R' \cup S$. **(13)(14)(15)**Debido a que $R' \cup S = (R \cap S')'$, entonces $(x,x) \in (R \cap S')'$ o sea $(x,x) \notin R \cap S'$. **(16)(17)**Como $R \cap S' = R - S$, entonces $(x,x) \notin R - S$. **(18)**Pero esto significa que $R - S$ es irreflexiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R \cap S$, $R \cup S$, $R - S$ son irreflexivas en *A.*

Por hipótesis,

$$(x,x) \notin R \wedge (x,x) \notin S \quad \forall x \in A .$$

Esto implica que $(x,x) \notin R \cap S$, y significa que $R \cap S$ es irreflexiva en A . Aplicando la ley D'Morgan a la hipótesis se tiene

$$\neg((x,x) \in R \vee (x,x) \in S),$$

esto es

$$(x,x) \notin R \cup S \;\; \forall x \in A ,$$

es decir que $R \cup S$ es irreflexiva en A . Por otra parte $(x,x) \notin R$ o sea $(x,x) \in R'$, debido a que *R* es irreflexiva en *A*. Es evidente que $(x,x) \in R' \cup S$. Debido a que $R' \cup S = (R \cap S')'$, entonces $(x,x) \in (R \cap S')'$ o sea $(x,x) \notin R \cap S'$. Como $R \cap S' = R - S$, entonces $(x,x) \notin R - S$. Pero esto significa que $R - S$ es irreflexiva.

6. Sea R , S relaciones en A.

(vi) R es simétrica $\Rightarrow$ R^{-1} es simétrica .

ELD

Demostrar R^{-1} es simétrica .

Traducción : $(y,x)\in R^{-1} \Rightarrow (x,y)\in R^{-1}$

(1)	***R, S* son relaciones en *A***	**P**
(2)	***R* es simétrica**	**P**
(3)	$(y,x)\in R^{-1}$	P
(4)	$(x,y)\in R$	I 3, 2.13
(5)	$(x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R$	traducción 2
(6)	$(y,x)\in R$	PP 4,5
(7)	$(x,y)\in R^{-1}$	6
(8)	$(y,x)\in R^{-1} \Rightarrow (x,y)\in R^{-1}$	CP 3,7
(9)	R^{-1} es simétrica	traducción 8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que R^{-1} es simétrica.

(3) Sea $(y,x)\in R^{-1}$; **(4)** $(x,y)\in R$ (2.13). **(5)(6)** Como R es simétrica, entonces $(y,x)\in R$ y **(7)(8)(9)**por lo tanto $(x,y)\in R^{-1}$, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que R^{-1} es simétrica.

Sea $(y,x)\in R^{-1}$. Entonces $(x,y)\in R$ (2.13).Como$R$ es simétrica, entonces $(y,x)\in R$ y por lo tanto $(x,y)\in R^{-1}$, que era lo que queríamos de mostrar.

7. Sea R , S relaciones en A.

(i) R es reflexiva en $A \Rightarrow S\subseteq R\circ S \wedge S\subseteq S\circ R$

ELD

Demostrar : $S\subseteq R\circ S \wedge S\subseteq S\circ R$

(1)	***R* , *S* relaciones en A**	**P**
(2)	***R* es reflexiva en *A***	**P**
(3)	$(x,y)\in S$	P

	(4)	$(x,x)\in R$	2
	(5)	$(x,x)\in R\wedge(x,y)\in S$	A 4,3
	(6)	$(x,y)\in S\circ R$	I 5,2.14
	(7)	$(x,y)\in S\Rightarrow (x,y)\in S\circ R$	CP3,7
□$_1$	(8)	$S\subseteq S\circ R$	traducción 7
	(9)	$(x,y)\in S$	P
	(10)	$(y,y)\in R$	traducción 2
	(11)	$(x,y)\in S\wedge (y,y)\in R$	A 9,10
	(12)	$(x,y)\in R\circ S$	I 11,2.14
	(13)	$(x,y)\in S\Rightarrow (x,y)\in R\circ S$	CP 9,12
□$_2$	(14)	$S\subseteq R\circ S$	traducción 13
□	(15)	$S\subseteq R\circ S\wedge S\subseteq S\circ R$	A 14,8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $S\subseteq R\circ S\wedge S\subseteq S\circ R$.

(3) Sea $(x,y)\in S$. **(4)** $(x,x)\in R$ debido a que R es reflexiva. **(5) (6)**Reordenando en la forma $(x,x)\in R\wedge$ $(x,y)\in S$, se tiene que $(x,y)\in S\circ R$ (2.14), **(7)(8)**con lo cual se demuestra que $S\subseteq S\circ R$.

(9) Retomemos nuevamente $(x,y)\in S$. **(10)** $(y,y)\in R$ debido a que R es reflexiva. **(11)(12)**Reordenando en la forma $(x,y)\in S\wedge$ $(y,y)\in R$, se tiene que $(x,y)\in S\circ R$ (2.14), **(13)(14)**con lo cual demostramos que $S\subseteq S\circ R$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $S\subseteq R\circ S\wedge S\subseteq S\circ R$.

Sea $(x,y)\in S$. $(x,x)\in R$ debido a que R es reflexiva. Reordenando en la forma $(x,x)\in R\wedge$ $(x,y)\in S$, se tiene que $(x,y)\in S\circ R$ (2.14), con lo cual se demuestra que $S\subseteq S\circ R$.

Retomemos nuevamente $(x,y)\in S$. Entonces $(y,y)\in R$ debido a que R es reflexiva. Reordenando en la forma $(x,y)\in S\wedge$ $(y,y)\in R$, se tiene que $(x,y)\in S\circ R$ (2.14), con lo cual demostramos que $S\subseteq S\circ R$.

7. Sea R, S relaciones en A.

(ii) R es reflexiva en A y S reflexiva en A y transitiva

$$\Rightarrow \quad (R \subseteq S \Leftrightarrow R \circ S = S)$$

ELD

Demostrar : $R \subseteq S \Leftrightarrow R \circ S = S$

	(1)	**R reflexiva en A**	**P**
	(2)	**S es reflexiva en A y transitiva**	**P**
$\Rightarrow$)	(3)	$R \subseteq S$	P
	(4)	$(x, y) \in R \circ S$	P
	(5)	$\exists z((x, z) \in S \wedge (z, y) \in R)$	I 4,2.14
	(6)	$(z, y) \in R$	S 5
	(7)	$(z, y) \in S$	3,6
	(8)	$(x, z) \in S$	S 5
	(9)	$(x, z) \in S \wedge (z, y) \in S$	A 8,7
	(10)	$(x, z) \in S \wedge (z, y) \in S \Rightarrow (x, y) \in S$	2(tr.)
	(11)	$(x, y) \in S$	PP 9,10
	(12)	$(x, y) \in R \circ S \Rightarrow (x, y) \in S$	CP 4,11
	(13)	$R \circ S \subseteq S$	traducción 12
	(14)	$(x, y) \in S$	P
	(15)	$(y, y) \in R$	1
	(16)	$(x, y) \in S \wedge (y, y) \in R$	A 14,15
	(17)	$(x, y) \in R \circ S$	I 16,2.14
	(18)	$(x, y) \in S \Rightarrow (x, y) \in R \circ S$	CP 14,17
	(19)	$S \subseteq R \circ S$	traducción 18
	(20)	$R \circ S = S$	I 13,19, 1.4(ii)
□$_1$	(21)	$R \subseteq S \Rightarrow R \circ S = S$	CP 3,20
$\Leftarrow$)	(22)	$R \circ S = S$	P
	(23)	$(x, y) \in R$	P
	(24)	$(x, x) \in S$	2
	(25)	$(x, x) \in S \wedge (x, y) \in R$	A 24,23
	(26)	$(x, y) \in R \circ S$	I 25,2.14
	(27)	$(x, y) \in S$	I 26,22
	(28)	$(x, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in S$	CP 23,27
	(29)	$R \subseteq S$	traducción 28
□$_2$	(30)	$R \circ S = S \Rightarrow R \subseteq S$	CP 22,29
□	(31)	$R \subseteq S \Leftrightarrow R \circ S = S$	LB 21,22

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R \subseteq S \Leftrightarrow R \circ S = S$

$\Rightarrow$)

Supongamos que $R \subseteq S$ y demostremos que $R \circ S = S$.**(4)**Sea $(x, y) \in R \circ S$. **(5)**Entonces existe un z tal que $(x, z) \in S \wedge (z, y) \in R$. **(6)(7)** Como $R \subseteq S$, $(z, y) \in S$.**(8)(9)**Entonces tenemos que $(x, z) \in S \wedge (z, y) \in S$. **(10)(11)**Debido a que S es transitiva, entonces $(x, y) \in S$ **(12)(13)**y tenemos que

$$R \circ S \subseteq S \qquad (\text{ I }) .$$

(14) Sea ahora $(x, y) \in S$. **(15)** $(y, y) \in R$ debido a que R es reflexiva. **(16)(17)** Claramente $(x, y) \in R \circ S$ **(18)(19)** y por lo tanto

$$S \subseteq R \circ S \qquad (\text{ II }) .$$

(20) De (I) y (II), se tiene que $R \circ S = S$; **(21)**con lo cual se ha demostrado la implicación

$$R \subseteq S \Rightarrow R \circ S = S \text{ . } \square_1$$

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $R \circ S = S$ y demostremos que $R \subseteq S$.

(23) Sea $(x, y) \in R$. **(24)** $(x, x) \in S$ debido a que S es reflexiva. **(25)(26)(27)**Reordenando en la forma $(x, x) \in S \wedge (x, y) \in R$, $(x, y) \in R \circ S$ y $(x, y) \in S$ (se ha supuesto que $R \circ S = S$), **(28)(29)**obteniéndose que $R \subseteq S$. **(30)**Con esto se demuestra la implicación

$$R \circ S = S \Rightarrow R \subseteq S \text{ . } \square_2$$

(31) De los resultados $\square_1$ y $\square_2$ se obtiene $R \subseteq S \Leftrightarrow R \circ S = S$, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R \subseteq S \Leftrightarrow R \circ S = S$

$\Rightarrow$) Supongamos que $R \subseteq S$ y demostremos que $R \circ S = S$.

Sea $(x,y)\in R\circ S$. Entonces existe un z tal que $(x,z)\in S\wedge(z,y)\in R$. Como $R\subseteq S$, $(z,y)\in S$ .Entonces tenemos que $(x,z)\in S\wedge(z,y)\in S$. Debido a que S es transitiva, entonces $(x,y)\in S$ y tenemos que

$$R\circ S\subseteq S \qquad (\text{ I })\,.$$

Sea ahora $(x,y)\in S$. $(y,y)\in R$ debido a que R es reflexiva. Claramente $(x,y)\in R\circ S$ y por lo tanto se tiene que

$$S\subseteq R\circ S \qquad (\text{ II })\,.$$

De (I) y (II), se tiene que $R\circ S=S$; con lo cual se ha demostrado la implicación

$$R\subseteq S\Rightarrow R\circ S=S\,. \quad \square_1$$

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $R\circ S=S$ y demostremos que $R\subseteq S$.

Sea $(x,y)\in R$. $(x,x)\in S$ debido a que S es reflexiva. Reordenando en la forma $(x,x)\in S\wedge(x,y)\in R$, $(x,y)\in R\circ S$ y $(x,y)\in S$ (se ha supuesto que $R\circ S=S$), obteniéndose que $R\subseteq S$. Con esto se demuestra la implicación

$$R\circ S=S\Rightarrow R\subseteq S\,. \quad \square_2$$

De los resultados $\square_1$ y $\square_2$ se obtiene $R\subseteq S\Leftrightarrow R\circ S=S$, lo que queríamos demostrar.

8. Para cada una de las siguientes relaciones R en R^2, R es una relación de equivalencia.

(a) $R=\{((a,b),(c,d))/\,c-d=d-b\}$

R es reflexiva : $((a,b),(a,b))\in R\Leftrightarrow a-a=b-b$

R es simétrica : $((a,b),(c,d))\in R\Rightarrow c-a=d-b$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow a-c=b-d\\&\Rightarrow((c,d),(a,b))\in R\end{aligned}$$

R es transitiva :

$((a,b),(c,d)) \in R \wedge ((c,d),(e,f)) \in R \Rightarrow ((a,b),(e,f)) \in R$

ELD

Demostrar : $((a,b),(c,d)) \in R \wedge ((c,d),(e,f)) \in R \Rightarrow ((a,b),(e,f)) \in R$

(1)	$((a,b),(c,d)) \in R \wedge ((c,d),(e,f)) \in R$	**P**
(2)	$((a,b),(c,d)) \in R$	S1
(3)	$c-a=d-b$	traducción 2
(4)	$((c,d),(e,f)) \in R$	S 1
(5)	$e-c=f-d$	traducción 4
(6)	$e-a=f-b$	3,5
(7)	$((a,b),(e,f)) \in R$	traducción 6
(8)	$((a,b),(c,d)) \in R \wedge ((c,d),(e,f)) \in R \Rightarrow ((a,b),(e,f)) \in R$	CP 1,7
□ (9)	R es transitiva	traducción 8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R = \{((a,b),(c,d)) / c-d = d-b\}$ es transitiva.

(1) Supongamos que $((a,b),(c,d)) \in R$ y $((c,d),(e,f)) \in R$.**(2)(3)**Por lo primero, $c-a=d-b$ **(4)(5)**y por lo segundo, $e-c=f-d$.**(6)**De estas dos igualdades se tiene que $e-a=f-b$, **(7)**es decir que $((a,b),(e,f)) \in R$, **(8)(9)**que era lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R = \{((a,b),(c,d)) / c-d = d-b\}$ es transitiva.

Supongamos que $((a,b),(c,d)) \in R$ y $((c,d),(e,f)) \in R$. Por lo primero, $c-a=d-b$ y por lo segundo, $e-c=f-d$ .De estas dos igualdades se tiene que $e-a=f-b$, es decir que $((a,b),(e,f)) \in R$, que era lo que queríamos demostrar.

8. (b) $R = \{((a,b),(c,d)) /\ a^2+b^2 = c^2+d^2\}$

Reflexiva : $((a,b),(a,b)) \in R \Leftrightarrow\ a^2+b^2 = a^2+b^2$
Simétrica : $((a,b),(c,d)) \in R \ \Rightarrow a^2+b^2 = c^2+d^2$

$$\Rightarrow c^2 + d^2 = a^2 + b^2$$
$$\Rightarrow ((c,d),(a,b)) \in R$$

Transitiva :
$((a,b),(c,d)) \in R \wedge ((c,d),(e,f)) \in R \Rightarrow ((a,b),(e,f)) \in R$

$((a,b),(c,d)) \in R \wedge ((c,d),(e,f)) \in R \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \wedge$
$c^2 + d^2 = e^2 + f^2$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = e^2 + f^2$$
$$\Rightarrow ((a,b),(e,f)) \in R$$

8. (c) $R = \{((a,b),(c,d)) / |a| + |b| = |c| + |d|\}$

Reflexiva : $((a,b),(a,b)) \in R \Leftrightarrow |a| + |b| = |a| + |b|$
Simétrica : $((a,b),(c,d)) \in R \Rightarrow |a| + |b| = |c| + |d|$

$$\Rightarrow |c| + |d| = |a| + |b|$$
$$\Rightarrow ((c,d),(a,b)) \in R$$

Transitiva :
$((a,b),(c,d)) \in R \wedge ((c,d),(e,f)) \in R \Rightarrow |a| + |b| = |c| + |d| \wedge |c| + |d| = |e| + |f|$

$$\Rightarrow |a| + |b| = |e| + |f|$$
$$\Rightarrow ((a,b),(e,f)) \in R$$

9. Sea $\mathfrak{L}$ el conjunto de rectas en el plano. // y $\perp$ relaciones en $\mathfrak{L}$ tal que:
$// = \{(l_1, l_2) / l_1 \text{ paralelo a } l_2\}$, $\perp = \{(l_1, l_2) / l_1 \text{ perpendicular a } l_2\}$

(a) // es una relación de equivalencia en $\mathfrak{L}$.

Reflexiva : $l // l \quad \forall l \in \mathfrak{L}$
Simétrica : $l_1 // l_2 \Rightarrow l_2 // l_1$
Transitiva: $l_1 // l_2 \wedge l_2 // l_3 \Rightarrow l_1 // l_3$

(b) $// \cup \perp$ es una relación de equivalencia en $\mathfrak{L}$.

Reflexiva : $(l,l) \in // \cup \perp \ \forall l \in \mathfrak{L}$

ELD

Demostrar : $(l,l) \in // \cup \perp$

(1)	$(l,l) \in //$	(a)
(2)	$(l,l) \in // \vee (l,l) \in \perp$	LA 1
□ (3)	$(l,l) \in // \cup \perp$	I trad.2,1.11(ii)

Simétrica :

ELD

Demostrar : $(l_1,l_2) \in // \cup \perp \Rightarrow (l_2,l_1) \in // \cup \perp$

(1)	$(l_1,l_2) \in // \cup \perp$	P
(2)	$(l_1,l_2) \in // \vee (l_1,l_2) \in \perp$	1
(3)	$(l_1,l_2) \in // \Rightarrow (l_2,l_1) \in //$	P
(4)	$(l_1,l_2) \in \perp \Rightarrow (l_2,l_1) \in \perp$	P
(5)	$(l_2,l_1) \in // \vee (l_2,l_1) \in \perp$	DS 2,3,4
(6)	$(l_2,l_1) \in // \cup \perp$	5
(7)	$(l_1,l_2) \in // \cup \perp \Rightarrow (l_2,l_1) \in // \cup \perp$	CP 1,7
□ (8)	$// \cup \perp$ es simétrica	traducción 7

Transitiva:

ELD

Demostrar : $// \cup \perp$ es transitiva

Traducción :

$$(l_1,l_2) \in // \cup \perp \wedge (l_2,l_3) \in // \cup \perp \Rightarrow (l_1,l_3) \in // \cup \perp$$

(1)	$(l_1,l_2) \in // \cup \perp \wedge (l_2,l_3) \in // \cup \perp$	P
(2)	$((l_1,l_2) \in // \vee (l_1,l_2) \in \perp) \wedge (l_2,l_3) \in // \cup \perp$	1
(3)	$((l_1,l_2) \in // \wedge (l_2,l_3) \in // \cup \perp) \vee ((l_1,l_2) \in \perp \wedge (l_2,l_3) \in // \cup \perp)$	2
(4)	$(l_1,l_2) \in // \wedge (l_2,l_3) \in // \cup \perp$	P
(5)	$(l_1,l_2) \in // \wedge ((l_2,l_3) \in // \vee (l_2,l_3) \in \perp)$	4
(6)	$((l_1,l_2) \in // \wedge (l_2,l_3) \in //) \vee ((l_1,l_2) \in // \wedge (l_2,l_3) \in \perp)$	5 (Distr.)
(7)	$(l_1,l_3) \in // \vee (l_1,l_3) \in \perp)$	6
(8)	$(l_1,l_3) \in // \cup \perp$	7
(9)	$(l_1,l_2) \in // \wedge (l_2,l_3) \in // \cup \perp \Rightarrow (l_1,l_3) \in // \cup \perp$	CP 4,8
(10)	$(l_1,l_2) \in \perp \wedge (l_2,l_3) \in // \cup \perp$	P
(11)	$(l_1,l_2) \in \perp \wedge ((l_2,l_3) \in // \vee (l_2,l_3) \in \perp)$	10

(12)	$((l_1,l_2)\in\perp \wedge (l_2,l_3)\in //) \vee ((l_1,l_2)\in\perp \wedge (l_2,l_3)\in\perp)$	11
(13)	$(l_1,l_3)\in\perp \vee (l_1,l_3)\in //$	12
(14)	$(l_1,l_3)\in // \vee (l_1,l_3)\in\perp$	Cl 13
(15)	$(l_1,l_3)\in // \cup \perp$	14
(16)	$(l_1,l_2)\in\perp \wedge (l_2,l_3)\in // \cup \perp \Rightarrow (l_1,l_3)\in // \cup \perp$	CP 10,15
(17)	$(l_1,l_3)\in // \cup \perp \vee (l_1,l_3)\in // \cup \perp$	DS 3,916
(18)	$(l_1,l_3)\in // \cup \perp$	DP 17
(19)	$(l_1,l_2)\in // \cup \perp \wedge (l_2,l_3)\in // \cup \perp \Rightarrow (l_1,l_3)\in // \cup \perp$	CP 1,18
□ (20)	$// \cup \perp$ es transitiva	trad. 19

10. (i) R es relación de equivalencia $\Rightarrow$ R^{-1} es relación de equivalencia.

ELD

Demostrar : R^{-1} es relación de equivalencia.

Traducción : R^{-1} es reflexiva, simétrica y transitiva

(1)	**R es relación de equivalencia**	**P**
(2)	$(x,x)\in R \ \forall x$	1, R reflexiva
(3)	$(x,x)\in R^{-1} \ \forall x$	2
(4	R^{-1} reflexiva	traducción 3
(5)	$(y,x)\in R^{-1}$	P
(6)	$(x,y)\in R$	I 5,2.13
(7)	$(y,x)\in R$	I 6,1(R simétrica)
(8)	$(x,y)\in R^{-1}$	I 7,2.13
(9)	$(y,x)\in R^{-1} \Rightarrow (y,x)\in R^{-1}$	CP 5,8
(10)	R^{-1} es simétrica	traducción 9
(11)	$(x,y)\in R^{-1} \wedge (y,z)\in R^{-1}$	P
(12)	$(y,x)\in R \wedge (z,y)\in R$	I 11,2.13
(13)	$(z,y)\in R \wedge (y,x)\in R$	Cl 12
(14)	$(z,x)\in R$	I 13, 1(R tr.)
(15)	$(x,z)\in R^{-1}$	I 14,2.13
(16)	$(x,y)\in R^{-1} \wedge (y,z)\in R^{-1} \Rightarrow (x,z)\in R^{-1}$	CP 11,15
(17)	R^{-1} es transitiva	traducción 16
(18)	R^{-1} es reflexiva, simétrica y transitiva	4,10,17
□ (19)	R^{-1} es de equivalencia	18

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que R^{-1} es relación de equivalencia.

Veamos que R^{-1} es reflexiva.
(1) (2)(3)(4) $(x,x)\in R^{-1}\ \ \forall x$ debido a que $(x,x)\in R\ \ \forall x$ por ser R es reflexiva.

Veamos que R^{-1} es simétrica.
(5) Sea $(y,x)\in R^{-1}$. **(6)(7)**Entonces $(x,y)\in R$ y $(y,x)\in R$ (por ser R simétrica).
(8) (9)(10) De donde $(x,y)\in R^{-1}$.

Veamos que R^{-1} es transitiva. **(11)**Supongamos que $(x,y)\in R^{-1}$ y $(y,z)\in R^{-1}$.
(12)(13) Entonces $(z,y)\in R\wedge(y,x)\in R$ (2.13). **(14)**Debido a que R es transitiva, $(z,x)\in R$ **(15)**o sea $(x,z)\in R^{-1}$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que R^{-1} es relación de equivalencia.

Veamos que R^{-1} es reflexiva. $(x,x)\in R^{-1}\ \ \forall x$ debido a que $(x,x)\in R\ \ \forall x$ por ser R es reflexiva.

Veamos que R^{-1} es simétrica. Sea $(y,x)\in R^{-1}$. Entonces $(x,y)\in R$ y $(y,x)\in R$ (por ser R simétrica). De donde $(x,y)\in R^{-1}$.

Veamos que R^{-1} es transitiva. Supongamos que $(x,y)\in R^{-1}$ y $(y,z)\in R^{-1}$. Entonces $(z,y)\in R\wedge(y,x)\in R$ (2.13). Debido a que R es transitiva, $(z,x)\in R$ o sea $(x,z)\in R^{-1}$.

10. (ii) R es reflexiva en $\overrightarrow{p_1}R$ y transitiva $\Rightarrow$ $R\circ R=R$

ELD

Demostrar : $R\circ R=R$

Traducción : $(x,y)\in R\circ R \Leftrightarrow (x,y)\in R$

(1)	**R reflexiva en $\overrightarrow{p_1}R$ y transitiva**	**P**
(2)	$(x,y)\in R\circ R$	P

	(3)	$\exists z((x,z)\in R\wedge (z,y)\in R)$	I 2,2.14
	(4)	$(x,y)\in R$	I 3,1 (R tr.)
$\square_1$	(5)	$(x,y)\in R\circ R\Rightarrow (x,y)\in R$	CP 2,4
	(6)	$(x,y)\in R$	P
	(7)	$(x,x)\in R \quad \forall x\in \overrightarrow{p_1} R$	1
	(8)	$(x,x)\in R\wedge (x,y)\in R$	A 7,6
	(9)	$(x,y)\in R\circ R$	I 8,2.14
$\square_2$	(10)	$(x,y)\in R\Rightarrow (x,y)\in R\circ R$	CP 6,9
	(11)	$(x,y)\in R\circ R\Leftrightarrow (x,y)\in R$	LB 5,10
$\square$	(12)	$R\circ R=R$	traducción 11

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R\circ R=R$.

(2) Sea $(x,y)\in R\circ R$. **(3)**Entonces existe un z tal que $(x,z)\in R\wedge (z,y)\in R$. **(4)**Debido a que R es transitiva, $(x,y)\in R$. **(5)**Así que se tiene la implicación

$$(x,y)\in R\circ R\Rightarrow (x,y)\in R \ . \quad (\text{ I })$$

(6) Sea ahora $(x,y)\in R$. **(7)**Como R es reflexiva en $\overrightarrow{p_1} R$, $(x,x)\in R \quad \forall x\in \overrightarrow{p_1} R$. **(8)**Entonces se tiene que $(x,x)\in R\wedge (x,y)\in R$. **(9)**Pero esto significa que $(x,y)\in R\circ R$, **(10)** o sea que se tiene la implicación

$$(x,y)\in R\Rightarrow (x,y)\in R\circ R \ . \quad (\text{ II })$$

(11) De (I) y (II) se tiene la equivalencia $(x,y)\in R\circ R\Leftrightarrow (x,y)\in R$ **(12)** o sea $R\circ R=R$**.**

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R\circ R=R$.

Sea $(x,y)\in R\circ R$. Entonces existe un z tal que $(x,z)\in R\wedge (z,y)\in R$. Debido a que R es transitiva, $(x,y)\in R$. Así que se tiene la implicación

$$(x,y)\in R\circ R\Rightarrow (x,y)\in R \ . \quad (\text{ I })$$

Sea ahora $(x,y)\in R$. Como R es reflexiva en $\overset{\rightarrow}{p_1} R$, $(x,x)\in R \ \ \forall x\in \overset{\rightarrow}{p_1} R$. Entonces $(x,x)\in R\wedge(x,y)\in R$. Pero esto significa que $(x,y)\in R\circ R$, o sea que se cumple la implicación

$$(x,y)\in R \Rightarrow (x,y)\in R\circ R \ . \qquad (\text{ II })$$

De (I) y (II) se tiene $(x,y)\in R\circ R \Leftrightarrow (x,y)\in R$ o sea $R\circ R = R$.

11. Sea $(R_i)_{i\in I}$ una familia de relaciones de equivalencia en *A*.

(i) $\bigcap_{i\in I} R_i$ es una relación de equivalencia en *A*.

ELD

Demostrar : $\bigcap_{i\in I} R_i$ **es una relación de equivalencia en** ***A***.

Traducción : $\bigcap_{i\in I} R_i$ es reflexiva, simétrica y transitiva

(1)	$(R_i)_{i\in I}$ **una familia de relaciones de equivalencia en** ***A***.	**P**
(2)	$(x,x)\in R_i \ \forall i\in I \ \forall x\in A$	1 (R_i refl.)
(3)	$(x,x)\in \bigcap_{i\in I} R_i \ \ \forall x\in A$	I 2, 4.1(i)
□$_1$ (4)	$\bigcap_{i\in I} R_i$ es reflexiva	3
(5)	$(x,y)\in \bigcap_{i\in I} R_i$	P
(6)	$(x,y)\in R_i \forall i\in I$	I 5,4.1(i)
(7)	$(y,x)\in R_i \forall i\in I$	I 6,1(simét.)
(8)	$(y,x)\in \bigcap_{i\in I} R_i$	I 7,4.1(i)
(9)	$(x,y)\in \bigcap_{i\in I} R_i \ \Rightarrow \ (y,x)\in \bigcap_{i\in I} R_i$	CP 5,8
□$_2$ (10)	$\bigcap_{i\in I} R_i$ es simétrica	traducción 9
(11)	$(x,y)\in \bigcap_{i\in I} R_i \wedge (y,z)\in \bigcap_{i\in I} R_i$	P
(12)	$(x,y)\in R_i \ \forall i\in I \ \wedge (y,z)\in R_i \ \forall i\in I$	I 11,4.1(i)
(13)	$(x,z)\in R_i \ \forall i\in I$	I 12, 1(R_i tr.)
(14)	$(x,z)\in \bigcap_{i\in I} R_i$	I 13,4.1(i)
(15)	$(x,y)\in \bigcap_{i\in I} R_i \wedge (y,z)\in \bigcap_{i\in I} R_i \Rightarrow (x,z)\in \bigcap_{i\in I} R_i$	CP 11,14
□$_3$ (16)	$\bigcap_{i\in I} R_i$ es transitiva	traducción 15

(17) $\bigcap_{i\in I} R_i$ es reflexiva, simétrica y transitiva 4,10,16

(18) $\bigcap_{i\in I} R_i$ es relación de equivalencia traducción 17

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\bigcap_{i\in I} R_i$ es una relación de equivalencia en *A*.

(2) $(x,x)\in R_i\ \forall i\in I\ \ \forall x\in A$ debido a que cada R_i es reflexiva. **(3)**Pero esto significa que $(x,x)\in \bigcap_{i\in I} R_i\ \ \forall x\in A$. **(4)**Luego $\bigcap_{i\in I} R_i$ es reflexiva.

Veamos que $\bigcap_{i\in I} R_i$ es simétrica:

(5) Sea $(x,y)\in \bigcap_{i\in I} R_i$. **(6)**Entonces $(x,y)\in R_i \forall i\in I$. **(7)**Debido a que cada R_i es simétrica entonces $(y,x)\in R_i \forall i\in I$. **(8)**Pero esto significa que $(y,x)\in \bigcap_{i\in I} R_i$.

Veamos que $\bigcap_{i\in I} R_i$ es transitiva.

(11) Supongamos que $(x,y)\in \bigcap_{i\in I} R_i \wedge (y,z)\in \bigcap_{i\in I} R_i$. **(12)**Entonces $(x,y)\in R_i\ \forall i\in I$ y $(y,z)\in R_i\ \forall i\in I$. **(13)** **(14)**Como cada R_i es transitiva, $(x,z)\in \bigcap_{i\in I} R_i$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\bigcap_{i\in I} R_i$ es una relación de equivalencia en *A*.

$(x,x)\in R_i\ \forall i\in I\ \ \forall x\in A$ debido a que cada R_i es reflexiva. Pero esto significa que $(x,x)\in \bigcap_{i\in I} R_i\ \ \forall x\in A$. Luego $\bigcap_{i\in I} R_i$ es reflexiva.

Veamos que $\bigcap_{i\in I} R_i$ es simétrica: Sea $(x,y)\in \bigcap_{i\in I} R_i$. Entonces $(x,y)\in R_i \forall i\in I$. Debido a que cada R_i es simétrica entonces $(y,x)\in R_i \forall i\in I$. Pero esto significa que $(y,x)\in \bigcap_{i\in I} R_i$.

Veamos que $\bigcap_{i\in I} R_i$ es transitiva. Supongamos que $(x,y)\in \bigcap_{i\in I} R_i \wedge (y,z)\in \bigcap_{i\in I} R_i$.

Entonces $(x,y)\in R_i\ \forall i\in I$ y $(y,z)\in R_i\ \forall i\in I$. Como cada R_i es transitiva, $(x,z)\in\bigcap_{i\in I} R_i$.

11.(iii) Sean R , S relaciones de equivalencia , $R\cup S$ es una relación de equivalencia $\Leftrightarrow (R\circ S\subseteq R\cup S\wedge S\circ R\subseteq R\cup S)$

(iii)$\Rightarrow$) **ELD**

Demostrar : $(R\circ S\subseteq R\cup S\wedge S\circ R\subseteq R\cup S)$

	(1)	***R* , *S* relaciones de equivalencia**	**P**
	(2)	$R\cup S$ **de equivalencia**	**P**
	(3)	$(x,y)\in R\circ S$	P
	(4)	$\exists z((x,z)\in S\wedge (z,y)\in R)$	I 3,2.14
	(5)	$S\subseteq R\cup S\wedge R\subseteq R\cup S$	P
	(6)	$(x,z)\in R\cup S\ \wedge(z,y)\in R\cup S$	I 4,5
	(7)	$(x,y)\in R\cup S$	I 6,2(tr.)
	(8)	$(x,y)\in R\circ S\Rightarrow\ (x,y)\in R\cup S$	CP3,7
$\square_1$	(9)	$R\circ S\subseteq R\cup S$	traducción 8
	(10)	$(x,y)\in S\circ R$	P
	(11)	$\exists z((x,z)\in R\wedge (z,y)\in S)$	I 10,2.14
	(12)	$(x,z)\in R\cup S\ \wedge(z,y)\in R\cup S$	11,5
	(13)	$(x,y)\in R\cup S$	I 12, 2(tr.)
	(14)	$(x,y)\in S\circ R\Rightarrow (x,y)\in R\cup S$	CP 10,13
$\square_2$	(15)	$S\circ R\subseteq R\cup S$	traducción 14
$\square$	(16)	$R\circ S\subseteq R\cup S\wedge S\circ R\subseteq R\cup S$	A 9,15

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R\circ S\subseteq R\cup S\wedge S\circ R\subseteq R\cup S$.

(3) Sea $(x,y)\in R\circ S$. **(4)**Entonces existe un z tal que $(x,z)\in S\wedge\ (z,y)\in R$.**(5)** **(6)** Ya que $S\subseteq R\cup S$ y $R\subseteq R\cup S$, entonces $(x,z)\in R\cup S$ y $(z,y)\in R\cup S$. **(7)**Como $R\cup S$ es transitiva, $(x,y)\in R\cup S$. **(8)(9)**Por lo tanto $R\circ S\subseteq R\cup S$. **(10)**Sea ahora $(x,y)\in S\circ R$.**(11)**Entonces $(x,z)\in R\wedge\ (z,y)\in S$ para algún z . **(12)** Porque $S\subseteq R\cup S$ y $R\subseteq R\cup S$, entonces $(x,z)\in R\cup S$ y $(z,y)\in R\cup S$. **(13)**Como $R\cup S$ es transitiva, entonces $(x,y)\in R\cup S$. **(14)(15)**Por lo tanto $R\circ S\subseteq R\cup S$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R \circ S \subseteq R \cup S \wedge S \circ R \subseteq R \cup S$.

Sea $(x, y) \in R \circ S$. Entonces existe un z tal que $(x, z) \in S \wedge (z, y) \in R$. Debido a que $S \subseteq R \cup S$ y $R \subseteq R \cup S$, entonces $(x, z) \in R \cup S$ y $(z, y) \in R \cup S$. Como $R \cup S$ es transitiva, $(x, y) \in R \cup S$. Por lo tanto $R \circ S \subseteq R \cup S$.

Sea ahora $(x, y) \in S \circ R$. Entonces $(x, z) \in R \wedge (z, y) \in S$ para algún z. Debido a que $S \subseteq R \cup S$ y $R \subseteq R \cup S$, entonces $(x, z) \in R \cup S$ y $(z, y) \in R \cup S$. Como $R \cup S$ es transitiva, $(x, y) \in R \cup S$. Por lo tanto $R \circ S \subseteq R \cup S$.

(iii) $\Leftarrow$)

ELD

Demostrar : $R \cup S$ es relación de equivalencia

Traducción : $R \cup S$ es reflexiva, simétrica y transitiva

(1)	***R* , *S* relaciones de equivalencia**	**P**
(2)	$R \circ S \subseteq R \cup S \wedge S \circ R \subseteq R \cup S$	**P**
(3)	$(x, x) \in R \ \forall x$	1 (R refl.)
(4)	$R \subseteq R \cup S$	P
(5)	$(x, x) \in R \cup S$	3,4
$\square_1$ (6)	$R \cup S$ es reflexiva	traducción 5
(7)	$(x, y) \in R \cup S$	P
(8)	$(x, y) \in R \vee (x, y) \in S$	P
(9)	$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$	1(R simétrica)
(10)	$(x, y) \in S \Rightarrow (y, x) \in S$	1(S simétrica)
(11)	$(y, x) \in R \vee (y, x) \in S$	DS 8,9,10
(12)	$(y, x) \in R \cup S$	DP 11
(13)	$(x, y) \in R \cup S \Rightarrow (y, x) \in R \cup S$	CP 7,12
$\square_2$ (14)	$R \cup S$ es simétrica	trad.13
(15)	$(x, y) \in R \cup S \wedge (y, z) \in R \cup S$	P
(16)	$((x, y) \in R \vee (x, y) \in S) \wedge ((y, z) \in R \vee (y, z) \in S)$	15
(17)	$[((x, y) \in R \vee (x, y) \in S) \wedge (y, z) \in R)]$ $\vee$ $[((x, y) \in R \vee (x, y) \in S) \wedge (y, z) \in S]$	16

(18)	$[((x,y)\in R \vee (x,y)\in S)\wedge (y,z)\in R)]$	P, 17
(19)	$((x,y)\in R \wedge (y,z)\in R) \vee ((x,y)\in S \wedge (y,z)\in R)$	18, Distr.
(20)	$(x,z)\in R \vee (x,z)\in R\circ S$	I 19, 2(tr.)
(21)	$(x,z)\in R\cup S \vee (x,z)\in R\cup S$	20,2
(22)	$(x,z)\in R\cup S$	DP21
(23)	$[((x,y)\in R \vee (x,y)\in S)\wedge (y,z)\in R)] \Rightarrow (x,z)\in R\cup S$	CP 18,22
(24)	$((x,y)\in R \vee (x,y)\in S)\wedge (y,z)\in S$	P,17
(25)	$((x,y)\in R \wedge (y,z)\in S) \vee ((x,y)\in S \wedge (y,z)\in S)$	24
(26)	$(x,z)\in S\circ R \vee (x,z)\in S$	I 25,2.14
(27)	$(x,z)\in R\cup S \vee (x,z)\in R\cup S$	26,2,4
(28)	$(x,z)\in R\cup S$	DP27
(29)	$((x,y)\in R \vee (x,y)\in S)\wedge (y,z)\in S \Rightarrow (x,z)\in R\cup S$	CP 24,28
(30)	$(x,z)\in R\cup S \vee (x,z)\in R\cup S$	DS 17,23,29
(31)	$(x,z)\in R\cup S$	DP 30
(32)	$(x,y)\in R\cup S \wedge (y,z)\in R\cup S \Rightarrow (x,z)\in R\cup S$	CP 15,31
$\square_3$ (33)	$R\cup S$ es transitiva	trad. 32
(34)	$R\cup S$ es reflexiva, simétrica y transitiva	6,14,33
$\square$ (35)	$R\cup S$ es de equivalencia.	Trad. 34

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R\cup S$ es una relación de equivalencia .

Veamos que $R\cup S$ es reflexiva : **(3)** $(x,x)\in R\ \forall x$ debido a que R es reflexiva (por hipótesis). **(4)(5)(6)**Es evidente que $(x,x)\in R\cup S$.

Demostremos ahora que $R\cup S$ es simétrica: **(7)**Sea $(x,y)\in R\cup S$. **(8)**Entonces se presentan dos alternativas :

$$(x,y)\in R\vee (x,y)\in S\ .$$

(9)(10)(11)(12) Si consideramos $(x,y)\in R$, como R es simétrica, entonces $(y,x)\in R$ y $(y,x)\in R\cup S$. Si consideramos $(x,y)\in S$, como S también es simétrica, $(y,x)\in S$ y $(y,x)\in R\cup S$. Entonces cualquiera sea la alternativa que tomemos, el resultado es que $(y,x)\in R\cup S$. **(13)(14)**Esto quiere decir que $R\cup S$ es simétrica.

Veamos que $R\cup S$ es transitiva :

(15) Sea $(x,y)\in R\cup S \ \wedge\ (y,z)\in R\cup S$. **(16)**Entonces por definición de unión se tiene $((x,y)\in R \vee (x,y)\in S)\wedge \ \ ((y,z)\in R \vee (y,z)\in S)$. **(17)**De esta fòrmula lógica se desprende la disyunción

$$[\,((x,y)\in R \vee (x,y)\in S)\wedge(y,z)\in R)]$$
ó
$$[\,((x,y)\in R \vee (x,y)\in S)\wedge(y,z)\in S\,]$$

(18) Si consideramos la alternativa $((x,y)\in R \vee (x,y)\in S)\wedge \ \ (y,z)\in R)$, **(19)**por la ley distributiva de la $\wedge$ con respecto a la $\vee$, se tiene

$$((x,y)\in R\wedge(y,z)\in R)\ \vee\ ((x,y)\in S\wedge(y,z)\in R).$$

(20) De donde $(x,z)\in R\ \vee\ \ (x,z)\in R\circ S$ (por ser R transitiva). **(21)**Como $R\circ S\subseteq R\cup S$ (segunda hipótesis), $(x,z)\in R\cup S\ \ \vee\ \ (x,z)\in R\cup S$. **(22)** **(23)** **()**O sea $(x,z)\in R\cup S$.

(24) Si consideramos la otra alternativa, esto es,

$$((x,y)\in R \vee (x,y)\in S)\wedge\ (y,z)\in S\ .$$

(25) Por la ley distributiva de la $\wedge$ con respecto a la $\vee$, se obtiene

$$((x,y)\in R\wedge(y,z)\in S\ )\ \vee\ ((x,y)\in S\wedge(y,z)\in S\ )\ .$$

(26) Esto es $(x,z)\in S\circ R\ \vee\ \ (x,z)\in S$ (2.14). **(27)**Como $S\circ R\subseteq R\cup S$ (segunda hipótesis), se tiene que $(x,z)\in R\cup S\ \vee (x,z)\in R\cup S$; **(28)** **(29)**es decir, $(x,z)\in R\cup S$.
.
(30)(31) Entonces vemos que cualquiera sea la alternativa que se considere el resultado es que $(x,z)\in R\cup S$. **(32)(33)(34)(35)**Así que $R\cup S$ es transitiva .

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R\cup S$ es una relación de equivalencia .

Veamos que $R\cup S$ es reflexiva: $(x,x)\in R\ \forall x$ porque R es reflexiva (hipótesis).Es evidente que $(x,x)\in R\cup S$.

Demostremos ahora que $R \cup S$ es simétrica : Sea $(x, y) \in R \cup S$ .Entonces se presentan dos alternativas :

$$(x, y) \in R \text{ o } (x, y) \in S$$

.
Si consideramos $(x, y) \in R$, como R es simétrica, entonces $(y, x) \in R$ y por lo tanto $(y, x) \in R \cup S$.
Si consideramos $(x, y) \in S$, como S también es simétrica, $(y, x) \in S$ y $(y, x) \in R \cup S$.

Entonces cualquiera sea la alternativa que tomemos, el resultado es que $(y, x) \in R \cup S$. Esto quiere decir que $R \cup S$ es simétrica.

Veamos que $R \cup S$ es transitiva :

Sea $(x, y) \in R \cup S \wedge (y, z) \in R \cup S$. Entonces por definición de unión se tiene $((x, y) \in R \vee (x, y) \in S) \wedge ((y, z) \in R \vee (y, z) \in S)$. De esta fòrmula lógica se desprende la disyunción

$$[\,((x, y) \in R \vee (x, y) \in S) \wedge (y, z) \in R\,)\,]$$

$$\text{ó}$$

$$[\,((x, y) \in R \vee (x, y) \in S) \wedge (y, z) \in S\,]$$

Si consideramos la alternativa $((x, y) \in R \vee (x, y) \in S) \wedge (y, z) \in R)$, por la ley distributiva de la $\wedge$ con respecto a la $\vee$, se tiene

$$((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \vee ((x, y) \in S \wedge (y, z) \in R).$$

De donde

$$(x, z) \in R \vee (x, z) \in R \circ S \quad \text{(por ser } R \text{ transitiva).}$$

Como

$$R \circ S \subseteq R \cup S \text{ (segunda hipótesis),}$$

entonces

$$(x, z) \in R \cup S \vee (x, z) \in R \cup S \text{ . O sea } (x, z) \in R \cup S \text{ .}$$

Si consideramos la otra alternativa, esto es,

$$((x, y) \in R \vee (x, y) \in S) \wedge (y, z) \in S \,,$$

por la ley distributiva de la $\wedge$ con respecto a la $\vee$, se obtiene

$$((x,y)\in R\wedge(y,z)\in S\ )\ \vee\ ((x,y)\in S\wedge(y,z)\in S\ )\ .$$

Esto es

$$(x,z)\in S\circ R\vee(x,z)\in S \qquad (2.14).$$

Como

$$S\circ R\subseteq R\cup S \quad \text{(segunda hipótesis),}$$

se tiene que

$$(x,z)\in R\cup S\ \vee(x,z)\in R\cup S\,;$$

es decir,

$$(x,z)\in R\cup S\ .$$

Entonces vemos que cualquiera sea la alternativa que se considere el resultado es que $(x,z)\in R\cup S$. Así que $R\cup S$ es transitiva .

12. Sean R , S relaciones de equivalencia en A .

$R\circ S$ es una relación de equivalencia en A $\Leftrightarrow$ $R\circ S=S\circ S$

$\Leftarrow$) **ELD**

Demostrar : $R\circ S$ es de equivalencia en A

Traducción : $R\circ S$ es reflexiva, simétrica y transitiva

(1)	**R , S relaciones de equivalencia en A**	**P**
(2)	$R\circ S=S\circ S$	**P**
(3)	$(x,x)\in R\ \wedge\ (x,x)\in S,\ \forall x\in A$	1 (reflexiva)
(4)	$(x,x)\in R\circ S$	I 3,2.14
$\square_1$ (5)	$R\circ S$ es reflexiva	4
(6)	$(x,y)\in R\circ S$	P
(7)	$(x,y)\in S\circ S$	I 6,2
(8)	$\exists z((x,z)\in S\wedge\ (z,y)\in S)$	I 7,2.14
(9)	$(z,x)\in S\wedge\ (y,z)\in S)$	I 8,1(refl.)
(10)	$(y,z)\in S)\wedge\ (z,x)\in S$	Cl 9
(11)	$(y,x)\in S\circ S$	I 10,2.14
(12)	$(y,x)\in R\circ S$	I 11,2
(13)	$(x,y)\in R\circ S\ \Rightarrow\ (y,x)\in R\circ S$	CP 6,12
$\square_2$ (14)	$R\circ S$ es simétrica	traducción 13
(15)	$(x,y)\in R\circ S\wedge\ (y,z)\in R\circ S$	P
(16)	$(x,y)\in S\circ S\wedge\ (y,z)\in S\circ S$	I 15,2

(17)	$\exists w((x,w) \in S \wedge (w,y) \in S) \wedge \exists r((y,r) \in S \wedge (r,z) \in S)$	16
(18)	$(x,y) \in S \wedge (y,z) \in S$	I 17,1(tr.)
(19)	$(x,z) \in S \circ S$	I 18,2.14
(20)	$(x,z) \in R \circ S$	I 19, 2
(21)	$(x,y) \in R \circ S \wedge (y,z) \in R \circ S \Rightarrow (x,z) \in R \circ S$	CP 15,20
(22)	$R \circ S$ es transitiva	traducción 21
$\square_3$ (23)	$R \circ S$ es reflexiva, simétrica y transitiva	5, 14, 22
$\square$ (24)	$R \circ S$ es una relación de equivalencia en A	traducción 23

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R \circ S$ es una relación de equivalencia en *A*.

Veamos que $R \circ S$ es reflexiva:

(3) Como R y S son relaciones reflexivas, $(x,x) \in R$ y $(x,x) \in S$, $\forall x \in A$. **(4)**Por 2.14, $(x,x) \in R \circ S$, **(5)**demostrándose que $R \circ S$ es reflexiva.

Veamos ahora que $R \circ S$ es simétrica:

(6) Sea $(x,y) \in R \circ S$. **(7)**Como $R \circ S = S \circ S$ (por hipótesis), $(x,y) \in S \circ S$ **(8)** o sea que existe un z tal que $(x,z) \in S$ y $(z,y) \in S$. **(9)(10)**Debido a que S es reflexiva, se tiene que $(y,z) \in S)$ y $(z,x) \in S$ **(11)** o sea $(y,x) \in S \circ S$. **(12)(13)(14)**Utilizando nuevamente la hipótesis $R \circ S = S \circ S$, $(y,x) \in R \circ S$.

Finalmente veamos que $R \circ S$ es transitiva :

(15) Supongamos que $(x,y) \in R \circ S$ y $(y,z) \in R \circ S$. **(16)**Como $R \circ S = S \circ S$ (por hipótesis), $(x,y) \in S \circ S \wedge (y,z) \in S \circ S$, **(17)**es decir que existen *w*, *r* tales que $(x,w) \in S \wedge (w,y) \in S$ y $(y,r) \in S \wedge (r,z) \in S$. **(18)**Como S es transitiva (por hipótesis), $(x,y) \in S \wedge (y,z) \in S$; **(19)**o sea $(x,z) \in S \circ S$. **(20)**Debido a que $R \circ S = S \circ S$ (segunda hipótesis), $(x,z) \in R \circ S$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R \circ S$ es una relación de equivalencia en *A*.

Veamos que $R \circ S$ es reflexiva:

Como R y S son relaciones reflexivas, $(x,x) \in R$ y $(x,x) \in S$ $\forall x \in A$. Por 2.14, $(x,x) \in R \circ S$, demostrándose que $R \circ S$ es reflexiva.

Veamos ahora que $R \circ S$ es simétrica:

Sea $(x,y) \in R \circ S$. Como $R \circ S = S \circ S$ (por hipótesis), $(x,y) \in S \circ S$ o sea que existe un z tal que $(x,z) \in S$ y $(z,y) \in S$. Debido a que S es reflexiva, se tiene que $(y,z) \in S)$ y $(z,x) \in S$ o sea $(y,x) \in S \circ S$. Utilizando nuevamente la hipótesis $R \circ S = S \circ S$, se tiene que $(y,x) \in R \circ S$.

Finalmente veamos que $R \circ S$ es transitiva :
Supongamos que

$$(x,y) \in R \circ S \quad \text{y} \quad (y,z) \in R \circ S .$$

Como

$$R \circ S = S \circ S \qquad \text{(por hipótesis),}$$

entonces

$$(x,y) \in S \circ S \quad \text{y} \quad (y,z) \in S \circ S ,$$

es decir

$$(x,w) \in S \wedge (w,y) \in S \;\text{ y }\; (y,r) \in S \wedge (r,z) \in S \quad \text{p. a. } w , r$$

entonces

$$(x,y) \in S \wedge (y,z) \in S \qquad \text{por S transitiva (hipótesis),}$$

o sea

$$(x,z) \in S \circ S .$$

Debido a que $R \circ S = S \circ S$ (segunda hipótesis), entonces $(x,z) \in R \circ S$.

13. Sea R una relación simétrica y reflexiva en A y S , T relaciones en A .
Entonces $R \subseteq S \wedge R \subseteq T \Rightarrow R \subseteq S \circ T$.

ELD

Demostrar : $R \subseteq S \circ T$.

(1)	**R una relación simétrica y reflexiva en A**	**P**
(2)	**S , T relaciones en A**	**P**
(3)	$R \subseteq S \wedge R \subseteq T$	**P**
(4)	$(x,y) \in R$	P
(5)	$R \subseteq S$	S3
(6)	$(x,y) \in S$	4,5
(7)	$(x,x) \in R$	1 (refl.)

(8)	$R \subseteq T$	S 2
(9)	$(x,x) \in T$	7,8
(10)	$(x,x) \in T \wedge (x,y) \in S$	A 9,6
(11)	$(x,y) \in S \circ T$	I 10,2.14
(12)	$(x,y) \in R \Rightarrow (x,y) \in S \circ T$	CP 4,11
□ (13)	$R \subseteq S \circ T$.	traducción 12

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R \subseteq S \circ T$.

(4) Sea $(x,y) \in R$. **(5)** **(6)**Como $R \subseteq S$ (tercera hipótesis), $(x,y) \in S$. **(7)**Debido a que R es reflexiva (primera hipótesis), $(x,x) \in R$, **(8)** **(9)**y como $R \subseteq T$, $(x,x) \in T$. **(10)**Entonces reordenando tenemos que $(x,x) \in T$ y $(x,y) \in S$ **(11)** o sea $(x,y) \in S \circ T$,**(12)(13)** demostrándose que $R \subseteq S \circ T$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $R \subseteq S \circ T$. Sea $(x,y) \in R$.
Como $R \subseteq S$ (tercera hipótesis), entonces $(x,y) \in S$. Debido a que R es reflexiva (primera hipótesis), $(x,x) \in R$, y como $R \subseteq T$, entonces $(x,x) \in T$. Reordenando tenemos que $(x,x) \in T$ y $(x,y) \in S$ o sea $(x,y) \in S \circ T$, demostrándose que $R \subseteq S \circ T$.

2. PARTICIONES

Supongamos que queremos armar un motor de un determinado tipo y tenemos a nuestra disposición suficientes partes para armarlo y aún más tenemos más partes de las necesarias (tenemos por ejemplo 3 cigüeñales). En el conjunto de todas estas partes existe una relación de equivalencia : Dos `partes son “equivalentes” si para efecto de armar el motor no importa cual tomemos (dos partes equivalentes tienen una misma referencia de fábrica). La situación la podemos ver de otra manera . La colección de todas nuestra partes las distribuimos en montones de partes mutuamente equivalentes . Cada parte irá en uno y en un solo de estos montones . Al conjunto de todos estos montones los llamaremos “una partición del conjunto de todas las partes” .

En esta sección estableceremos que a cada relación de equivalencia en un conjunto le corresponde una única partición de dicho conjunto y recíprocamente que a cada partición de un conjunto le corresponde una única relación de equivalencia de dicho conjunto . Aún más la relación de equivalencia inducida inducida por una partición que fue inducida por una relación de equivalencia es esta misma relación de equivalencia .

El concepto de partición inicialmente se ve independiente del concepto de relación de equivalencia . En esta sección se establece que en el fondo ambos conceptos son la misma cosa .

5.4 Definición : Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A . Para cada $x \in A$ llamaremos **clase de equivalencia de** x (módulo R) al conjunto $[x]_R$,

$$[x]_R = \{y \in A / yRx\} \quad .$$

Caracterización de los elementos de $[x]_R$

$$y \in [x]_R \Leftrightarrow y\,R\,x$$

Escribiremos simplemente $[x]$ en caso de que no importe aclarar con que relación de equivalencia R estamos trabajando.

5.5 Proposición : (i) $x \in [x]$

(ii) $[x]_R = [y]_R \Leftrightarrow y\,R\,x$

Demostración : Ejercicio .

5.6 Definición : Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A , al conjunto A/R de todas las clases de equivalencia que determina R lo llamaremos **conjunto cociente de** A **por** R :

$$A/R = \{[x]_R / \ x \in A\}$$

5.7 Definición : Se llama **partición de** A $(A \neq \phi)$ a todo conjunto $\{A_i\}_{i \in I}$ tal que

(i) Cada $A_i \subseteq A$

(ii) Cada $A_i \neq \phi$

(iii) $\bigcup_{i\in I} A_i = A$

(iv) $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \phi$

Ejemplo : $\{\{1, 2, 5\},\{3, 6\},\{4\}\}$ es una partición de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6,\}$.

5.8 Proposición : $\{\{x\} \ / \ x \in A\}$ y $\{A\}$ son particiones de A .

Demostración : Ejercicio .

5.9 Teorema : (i) Si R es una relación de equivalencia en A , entonces A/R es una partición de A .

(ii) Si $\mathcal{P}$ es una partición de A denotamos P_x al elemento de $\mathcal{P}$ que contiene a x y definimos una relación R en A por $xRy \Leftrightarrow P_x = P_y$, R es entonces una relación de equivalencia en A .

(iii) Existe una biyección entre el conjunto de todas las relaciones de equivalencia en un conjunto dado y el conjunto de todas las particiones de dicho conjunto.

Demostración : (i) Recordemos que A/R = $\{[x]_R \ / \ x \in A\}$.

Por definición cada $[x]_R \subseteq$ A .Cada $[x] \neq \phi$ porque $x \in [x]$; $\bigcup_{x\in A} [x] = A$ porque $\bigcup_{x\in A} [x] \subseteq A$.

Si $y \in A$, entonces $y \in \{y\}$ y por lo tanto $A \subseteq \bigcup_{x\in A} [x]$.

Si $[x]_R \cap [y]_R \neq \phi$, existe $z \in [x]_R \wedge z \in [y]_R$.

Ahora, $z \in [x]_R \wedge z \in [y]_R \Rightarrow zRx \wedge zRy$

$$\Rightarrow xRz \wedge zRy$$
$$\Rightarrow xRy$$
$$\Rightarrow [x]_R = [y]_R \ \ (5.5(ii)) .$$

(ii) En esta parte lo esencial es observar que por la definición de partición dada $x \in A$ le corresponde un único $P_x \in \mathcal{P}$ tal que $x \in P_x$ .Como $P_x = P_y$, entonces xRx .

Ahora $xRy \Rightarrow P_x = P_y \Rightarrow P_y = P_z \Rightarrow y \ R \ x$.

Por último , $xRy \wedge yRz \Rightarrow P_x = P_y \;\wedge P_y = P_z$

$\Rightarrow P_x = P_z \Rightarrow xR\,z$.

(iii) Sea *a :* { R / R relación de equivalencia en A}

$\mapsto$ { $\mathcal{P}$/ $\mathcal{P}$ partición de A} tal que aR = A/R .

a es inyectiva porque si $R_1 \neq R_2$ existe $(x,y) \in R_1$ pero $(x,y) \notin R_2$, $x\in[y]_{R_1}$ pero $x\notin[y]_{R_2}$ o sea que A/ $R_1 \neq$ A/ R_2 y $a\,R_1 \neq a\,R_2$.

a es sobreyectiva según se demostró en (ii) .

La observación sobre la posible apariencia de una relación de equivalencia que hicimos alrededor de la figura 48 nos puede ayudar a visualizar la proposición 5.9. Proyecte los cuadros que forman a la relación de equivalencia R sobre el conjunto A en el cual se ha definido R , esta proyección determina la partición *A/R* de *A*. Más precisamente , *A/R* = { $\vec{p}_1\, A_z \,/\, z \in A$ } , siendo $A_z = \{(x,y) \,/\, xRz \vee zRy\}$.

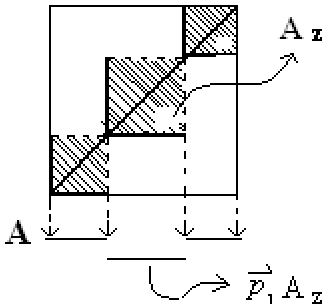


Fig. 50

Recíprocamente si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una partición de A , $\bigcup_{i\in I} A^2$ es una relación de equivalencia de A . Incidentalmente, podemos observar que $\{A_i^{\,2}\}_{i\in I}$ es una partición de R . Esta última observación nos hace pensar en una situación más general (Véase ejercicio 6).

EJERCICIOS 5.2

1. 5.5
2. 5.8

3. Encontrar la partición de R^2 para cada una de las relaciones del ejercicio 5.1 (8).
4. Encontrar la partición de $\mathfrak{L}$ para cada una de las relaciones del ejercicio 5.1 (9).
5. Para cada $n \in \mathbf{Z}$ definimos una relación en **Z** que llamaremos **congruencia módulo** n por $a \equiv b$ (mód n) $\Leftrightarrow$ $a - b$ es múltiplo de n .

(i) Para cada n la congruencia módulo n es una elación de equivalencia en **Z** .

(ii) ¿ Cuál es la correspondiente partición?

6. Sea $f : A \mapsto$ B una función .

(i) Si f es inyectiva y $\{A_i\}_{i \in I}$ una partición de $A \Rightarrow \{ \vec{f} A_i \}_{i \in I}$ partición de $\vec{f}$ A.

(ii) $\{B_i\}_{i \in I}$ partición de $\vec{f}$ A $\Rightarrow \{ \overleftarrow{f} B_i \}_{i \in I}$ es una partición de A **.**

(iii) Enuncie las anteriores proposiciones hablando de relaciones de equivalencia en lugar de particiones .

7. Sea R, S relaciones de equivalencia en A . Si $R \subseteq S$ se dice que R es un refinamiento de S .

(i) R refinamiento de $S \Rightarrow \forall x \in A ([x]_R \subseteq [y]_S)$.

Siendo R un refinamiento de S definimos : $S/R = \{([x]_R , [y]_R) / xSy\}$

(ii) R refinamiento de $S \Rightarrow S/R$ relación de equivalencia en A/R .

8. Sean R, S relaciones de equivalencia en A .

(i) $\forall x \in A$ $[x]_{R \cap S} = [x]_R \cap [x]_S$

(ii) Si definimos $A \Cap B = \{ x \cap y / x \in A \wedge y \in B \}$

$A/R \cap S = (A/R \Cap A/S) - \{\phi\}$

(iii) $R \cup S$ relación de equivalencia en $A \Rightarrow$ $\forall x$ $[x]_{R \cup S} = [x]_R \cup [x]_S$

(iv) $R \cup S$ relación de equivalencia en $A \Rightarrow A/(R \cup S) = (A/R \Cup A/S)$

(Siendo $A \Cup B = \{ x \cup y / x \in A \wedge y \in B \ (x \subseteq y \vee y \subseteq x) \}$

9. Toda función induce una relación de equivalencia en su dominio :
Sea $f : A \mapsto B$ una función . Definimos $xRy \Leftrightarrow fx = fy$

(i) R es una relación de equivalencia en A.

A la relación R así definida se le llama la relación de equivalencia inducida por f y a la partición correspondiente se le llama la partición inducida por R . Así por ejemplo, $\{\{x,-x\}/\ x \in R\}$ es la partición inducida por $fx = x^2$.

(¿Cuál es la partición inducida por la función seno?)

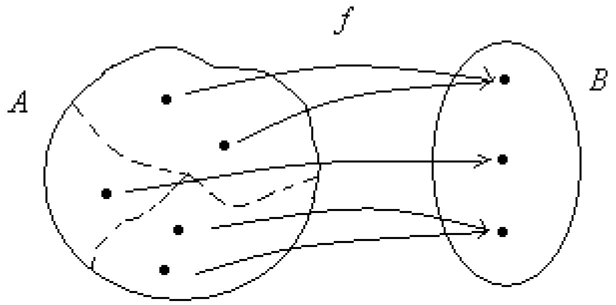


Fig. 51 La partición de A inducida por f

Recíprocamente, toda relación de equivalencia induce una función . Sea R una relación de equivalencia en A y $cx = [x]_R$. $c : A \mapsto A/R$ es una función llamada la función canónica de A en A/R que es sobreyectiva .

Sea R la relación de equivalencia inducida por $f : A \mapsto B$, definimos

$$s[x] = fx \qquad \text{para cada } [x] \in A/R .$$

(ii) $s : A/R \mapsto \vec{f} A$ es una biyección .

Si ahora definimos $ty = y$ para cada $y \in \vec{f} A$, se tiene que

(iii) $f = t \circ s \circ c$

O sea que toda función es la composición de tres funciones que son respectivamente sobreyectiva, biyectiva e inyectiva . A esto se le llama descomposición canónica de f .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle c}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle t} \\ A/R & \xrightarrow{s} & \vec{f}A \end{array}$$

Fig. 52

10. Demostrar o refutar : Si dos funciones inducen una misma relación de equivalencia entonces son iguales.

ACTIVIDAD PRÁCTICA – PROCESO IMITATIVO

1. (i) $x\in[x]$

ELD

Demostrar $x\in[x]$

Traducción : xRx

(1)	**R es relación de equivalencia en A**	**P**
(2)	R es reflexiva	1
(3)	xRx	traducción 2
□ (4)	$x\in[x]$	I 3,5.4

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $x\in[x]$.

(1)(2)(3) Debido a que R es relación de equivalencia en A , en particular R es reflexiva, esto es xRx. **(4)**O sea $x\in[x]$ (5.4).

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $x\in[x]$.

Debido a que R es relación de equivalencia en A , en particular R es reflexiva, esto es xRx. O sea $x\in[x]$ (5.4).

(ii) $[x]_R = [y]_R \Leftrightarrow x\,R\,y$

$\Rightarrow$)

ELD

Demostrar $[x]_R = [y]_R \Leftrightarrow y\,R\,x$

(1)	$[x]_R = [y]_R$	**P**
(2)	$x\in[x]_R$	(i)
(3)	$x\in[\mathrm{y}]_R$	I 1,2
(4)	$x\,R\,y$	I 3,5.4
□ (5)	$[x]_R = [y]_R \Rightarrow x\,R\,y$	CP 1,4

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $[x]_R = [y]_R \Leftrightarrow y\,R\,x$ en el sentido $\Rightarrow)$.

(1) Supongamos que $[x]_R = [y]_R$. **(2)** Por (i), proposición anterior, $x \in [x]_R$ **(3)** y por lo tanto $x \in [\mathrm{y}]_R$ **(4)(5)**o sea $x\,R\,y$ (5.4).

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $[x]_R = [y]_R \Leftrightarrow y\,R\,x$ en el sentido $\Rightarrow)$.

Supongamos que $[x]_R = [y]_R$. Por (i), proposición anterior, $x \in [x]_R$ y por lo tanto $x \in [\mathrm{y}]_R$ o sea $x\,R\,y$ (5.4).

$\Leftarrow)$ **ELD**

Demostrar $[x]_R = [y]_R$

Traducción : $z \in [x]_R \Leftrightarrow z \in [y]_R$

	(1)	**R es relación de equivalencia en A**	**P**
	(2)	$\boldsymbol{x\,R\,y}$	**P**
	(3)	$z \in [x]_R$	P
	(4)	$z\,R\,x$	I 3,5.4
	(5)	$z\,R\,x \wedge x\,R\,y$	A 4,2
	(6)	$z\,R\,y$	1, 4(R tr.)
	(7)	$z \in [\mathrm{y}]_R$	I 6,5.4
□$_1$	(8)	$z \in [x]_R \Rightarrow z \in [\mathrm{y}]_R$	CP 2,6
	(9)	$z \in [\mathrm{y}]_R$	P
	(10)	$z\,R\,y$	I 9,5.4
	(11)	$y\,R\,x$	I 1,2(R simét.)
	(12)	$z\,R\,y \wedge y\,R\,x$	A 10,11
	(13)	$z\,R\,x$	I 12,1(R tr.)
	(14)	$z \in [x]_R$	I 13,5.4
□$_2$	(15)	$z \in [y]_R \Rightarrow z \in [x]_R$	CP 9,14
	(16)	$z \in [x]_R \Leftrightarrow z \in [y]_R$	LB 8,15
□	(17)	$[x]_R = [y]_R$	traducción 16

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $[x]_R = [y]_R \Leftrightarrow y\,R\,x$ en el sentido $\Leftarrow$)

Demostraremos que $[x]_R = [y]_R$ teniendo como hipótesis xRy .
(3) Sea $z\in[x]_R$. **(4)**Entonces $z\ R\ x$ (5.4). **(5)(6)**Como xRy (hipótesis), $z\ R\ y$ debido a que R es transitiva (primera hipótesis). **(7)**O sea $z\in[\mathrm{y}]_R$ (5.4). **(8)**Por lo tanto se tiene la implicación

$$z\in[x]_R \Rightarrow z\in[\mathrm{y}]_R . \quad (\text{ I })$$

(9) Sea ahora $z\in[\mathrm{y}]_R$. **(10)**Entonces $z\,R\,y$ (5.4). **(11)(12)(12)**Por hipótesis $x\,R\,y$ y como R es simétrica (primera hipótesis) entonces $y\,R\,x$ y $z\,R\,x$, por ser R transitiva. **(14)**Entonces $z\in[x]_R$ (5.4). **(15)**Por lo tanto se cumple la implicación

$$z\in[y]_R \Rightarrow z\in[x]_R . \quad (\text{ II })$$

(16) De (I) y (II) se tiene $z\in[x]_R \Leftrightarrow z\in[y]_R$ **(17)** o sea $[x]_R = [y]_R$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $[x]_R = [y]_R \Leftrightarrow y\,R\,x$ en el sentido $\Leftarrow$)

Demostraremos que $[x]_R = [y]_R$ teniendo como hipótesis xRy .

Sea $z\in[x]_R$. Entonces $z\ R\ x$ (5.4). Como xRy (hipótesis), $z\ R\ y$ debido a que R es transitiva (primera hipótesis). O sea $z\in[\mathrm{y}]_R$ (5.4). Por lo tanto se tiene la implicación

$$z\in[x]_R \Rightarrow z\in[\mathrm{y}]_R . \quad (\text{ I })$$

Sea ahora $z\in[\mathrm{y}]_R$. Entonces $z\,R\,y$ (5.4). Por hipótesis $x\,R\,y$ y como R es simétrica (primera hipótesis) entonces $y\,R\,x$ y $z\,R\,x$, por ser R transitiva. Entonces $z\in[x]_R$ (5.4). Por lo tanto se cumple la implicación

$$z\in[y]_R \Rightarrow z\in[x]_R . \quad (\text{ II })$$

De (I) y (II) se tiene $z \in [x]_R \Leftrightarrow z \in [y]_R$ o sea $[x]_R = [y]_R$.

2. Existe una biyección entre el conjunto de todas las relaciones de equivalencia en un conjunto dado y el conjunto de todas las particiones de dicho conjunto.

Conjunto de particiones de A $\longleftrightarrow$ Conjunto de relaciones de equivalencia en A

$$\{\{x\} \ / \ x \in A\} \longrightarrow R = \{(x,x) \ / \ x \in A\} = \Delta_A$$

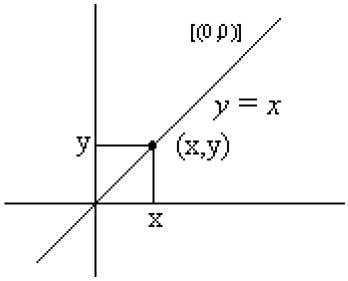
$$\{A\} \longrightarrow R = \{(x,y) \ / \ x, y \in A\} = A^2$$

Entonces las relaciones de equivalencia correspondientes a 5.8 son Δ_A y A^2.

3. Encontrar la partición de R^2 para cada una de las relaciones del ejercicio 5.1 (8).

(a) $R = \{((a,b),(c,d)) / c - d = d - b\}$ R es una relación de equivalencia.

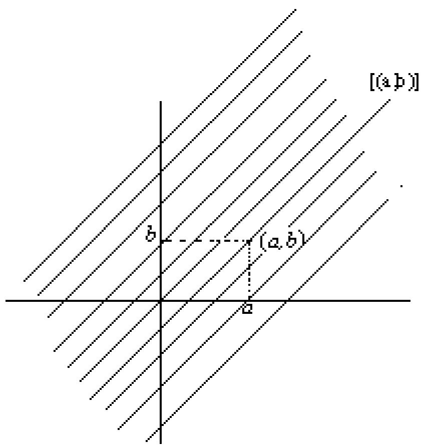
$[(a,b)] = \{ (x,y) / ((x,y),(a,b)) \in R \}$



$[(0,0)] = \{ (x,y) / ((x,y),(0,0)) \in R \}$
$= \{ (x,y) / 0 - x = 0 - y \}$
$= \{ (x,y) / y = x \}$

$[(1,2)] = \{ (x,y) / 1 - x = 2 - y \}$
$= \{ (x,y) / y = x + 1 \}$

$[(a,b)] = \{ (x,y) / x - a = y - b \}$
$= \{ (x,y) / y = x - a + b \}$
= La recta que pasa por el punto (a,b) y paralela a la recta $y = x$ (la diagonal).



Cada recta es una clase de equivalencia o un elemento de la partición.
Se puede ver que

$$\bigcup_{a,b\in \mathrm{R}}[(a,b)]_{R_1} = R^2 .$$

R^2 / R = el conjunto de clases de equivalencias o sea el conjunto de rectas del Plano paralelas a la diagonal, la recta $y = x$.

= partición de R^2.

3 (b) $R = \{((a,b),(c,d)) / \ a^2 + b^2 = c^2 + d^2\}$.

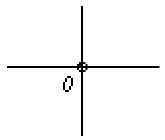
R es una relación de equivalencia.

$[(a,b)] = \{(x,y) / x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \}$

Ejemplo : la clase del (0,0),

$[(0,0)] = \{(x,y) / x^2 + y^2 = 0 \}$

$= \{(0,0)\}$



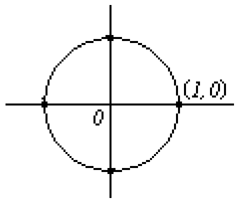
$[(1,0)] = \{(x,y) / x^2 + y^2 = 1 \}$

= C(O; 1) (Circunferencia de centro el origen y radio 1 y pasa por el punto (1, 0)).

$= [(-1,0)]$

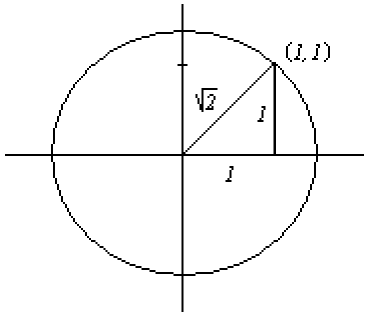
$= [(0,-1)]$

$= [(0,1)]$

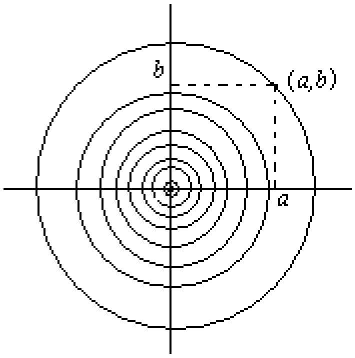


$[(1,1)]$, la clase de equivalencia de $(1,1)$, es la circunferencia de centro el origen, de radio $\sqrt{2}$ y que pasa por el punto $(1,1)$.

$[(1,1)] = \{(x,y) / x^2 + y^2 = 2 \}$



$\left[(a,b)\right]_R$ = La circunferencia de centro el origen , de radio $\sqrt{a^2+b^2}$ y que pasa por el punto (a,b).



$R^2/R = \{ \left[(a,b)\right]_{R_1} / \ a,b \in R \ \}$

R^2/R es el conjunto de circunferencias de centro el origen, radio $\sqrt{a^2+b^2}$ y que pasa por el punto (a,b).

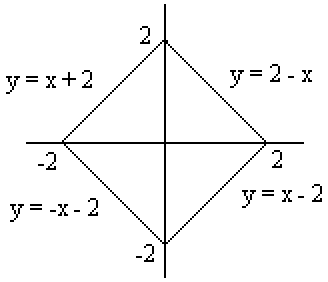
$$\bigcup_{a,b\in \mathrm{R}} \left[(a,b)\right]_R = \quad R^2$$

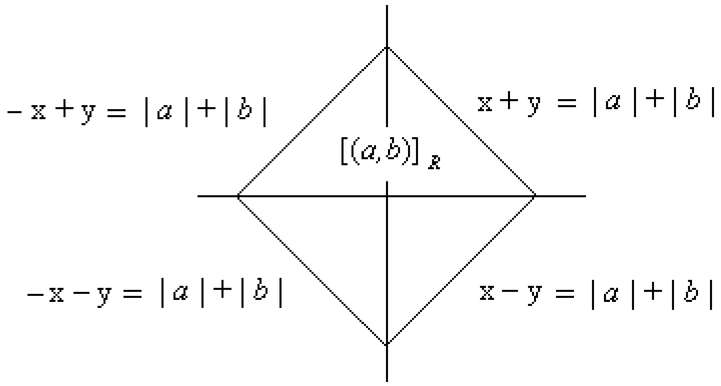
3 c) $R = \left\{((a,b),(c,d)) / \ |a| + |b| = |c| + |d| \right\}$

$$\left[(0,0)\right]_{R_1} = \left\{(x,y) / \ |x| + |y| = |0| + |0| \right\}$$
$$= \left\{(x,y) / \ |x| + |y| = 0 \right\}$$
$$= \left\{(0,0) \right\}$$

$$|x| + |y| = \begin{cases} x+y & x>0 \wedge y>0 \\ -x+y & x<0 \wedge y>0 \\ -x-y & x<0 \wedge y<0 \\ x-y & x>0 \wedge y<0 \end{cases}$$

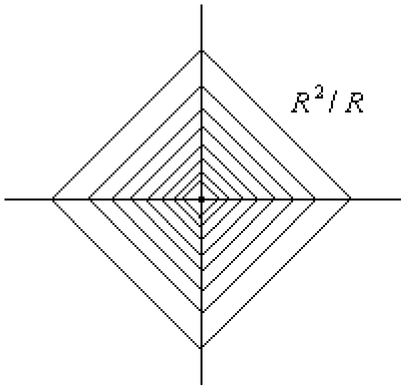
$$\left[(1,1)\right]_R = \left\{(x,y) / \ |x| + |y| = 1+1 \right\}$$
$$= \left\{(x,y) / \ |x| + |y| = 2 \right\}$$





$R^2/R = \{ [(a,b)]_{R_1} / \ a,b \in R \ \}$
= el conjunto de particiones de R^2.

$$\bigcup_{a,b\in R}[(a,b)]_R = R^2$$

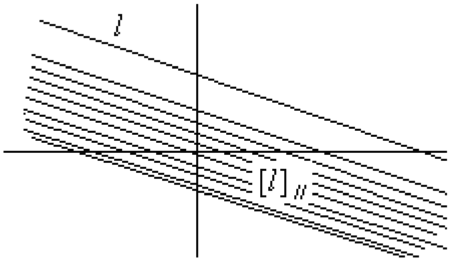


R^2/R es una partición de R^2

4. Encontrar la partición de $\mathfrak{L}$ para cada una de las relaciones del ejercicio 5.1 (9).

$\mathfrak{L}$ = {rectas en el plano } . // , $// \cup \perp$ relaciones de equivalencia en $\mathfrak{L}$.

Sea $l \in \mathfrak{L}$. $[l]_{//} = \{X \in \mathfrak{L} / X \ // \ l\}$.
$\mathfrak{L}/_{//}$ es una partición del plano R^2 .
$\mathfrak{L}/_{//} = \{ [l]_{//} \ / \ l \in \mathfrak{L} \}$



$\mathfrak{L}/_{// \cup \perp}$ es una partición del plano R^2. $\mathfrak{L}/_{// \cup \perp} = \{ [l]_{// \cup \perp} \ / \ l \in \mathfrak{L} \}$

$[l]_{//\cup\perp} = \{X\in\mathscr{L} \,/\, X \,//\, \cup\perp\, l\}.$

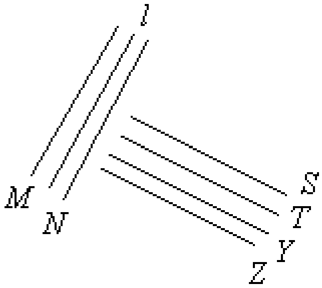
$M \,//\, l \Rightarrow M \,//\, l \vee M \perp l$

$\quad\quad \Rightarrow M \,//\, \cup\perp\, l$

$Z\perp l \quad \Rightarrow Z\perp l \vee Z \,//\, l$

$\quad\quad \Rightarrow Z\perp\cup \,//\, l$

$\quad\quad \Rightarrow Z \,//\, \cup\perp\, l$



5. Para cada $n\in\mathbf{Z}$ definimos una relación en **Z** que llamaremos **congruencia módulo** n por $a\equiv b$ (mód n) $\Leftrightarrow$ $a - b$ es múltiplo de n .

(i) Para cada n la congruencia módulo n es una relación de equivalencia en **Z** .

$[x]_R = \{\, y \in A \,/\, yRx \,\}$

$[x]_\equiv = \{\, y \in Z \,/\, y \equiv x \,\}$

$y\in[x]_\equiv \Leftrightarrow y\equiv x(\operatorname{mod} n)$

$\quad\quad \Leftrightarrow y - x = kn \; p.a. \; k \in Z$

$\equiv_n$ es reflexiva :

$x\equiv x(\operatorname{mod} n) \Leftrightarrow x - x = 0n$

$\equiv_n$ es simétrica .

$x\equiv y(\operatorname{mod} n) \Rightarrow x - y = kn \; p.a. \; k \in Z$

$\quad\quad\quad \Rightarrow y - x = (-k)n \; p.a. \; -k \in Z$

$\quad\quad\quad \Rightarrow y\equiv x(\operatorname{mod} n)$

$\equiv_n$ es transitiva?

ELD

Demostrar $x\equiv y(\operatorname{mod} n) \wedge y\equiv z(\operatorname{mod} n) \Rightarrow x\equiv z(\operatorname{mod} n)$

(1)	$x\equiv y(\operatorname{mod} n) \wedge y\equiv z(\operatorname{mod} n)$	P
(2)	$x - y = kn \; p.a. \; k \in Z \wedge y - z = k'n \; p.a. \; k' \in Z$	1
(3)	$y = x - kn$	2
(4)	$y - z = k'n$	S2
(5)	$(x - kn) - z = k'n$	I 3,4
(6)	$x - z = (k + k')n$	5
(7)	$q = k + k'$	P
(8)	$x - z = qn \quad q \in Z$	I 6,7
(9)	$x\equiv z(\operatorname{mod} n)$	8

(10) $x \equiv y(\bmod n) \wedge y \equiv z(\bmod n) \Rightarrow x \equiv z(\bmod n)$ CP 1,9
(11) La congruencia módulo n es transitiva trad. 10

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que la congruencia módulo n es transitiva. **(1)**Supongamos que $x \equiv y(\bmod n)$ y $y \equiv z(\bmod n)$. **(2)**Entonces

$$x - y = k\,n \quad p.a.\ k \in Z \qquad (1)$$
y
$$y - z = k'n \quad p.a.\ k' \in Z \qquad (2)$$

(3) De (1) $y = x - kn$ **(4)(5)** y reemplazando este valor para y en (2), se tiene $(x - kn) - z = k'n$. **(6)**De donde

$$x - z = (k + k')n \qquad (3)$$

(7) Haciendo q $=k + k'$ **(8)** y reemplazando en (3) se obtiene $x - z = qn$ con $q \in Z$. **(9)**Es decir $x \equiv z(\bmod n)$, **(10)(11)**lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que la congruencia módulo n es transitiva. Supongamos que $x \equiv y(\bmod n)$ y $y \equiv z(\bmod n)$. Entonces

$$x - y = k\,n \quad p.a.\ k \in Z \qquad (1)$$
y
$$y - z = k'n \quad p.a.\ k' \in Z \qquad (2)$$

De (1) $y = x - kn$ y reemplazando este valor para y en (2), tenemos que $(x - kn) - z = k'n$. De donde

$$x - z = (k + k')n \qquad (3)$$

Haciendo q $=k + k'$ y reemplazando en (3) se obtiene $x - z = qn$ con $q \in Z$. Es decir $x \equiv z(\bmod n)$, lo que queríamos demostrar.

(ii) ¿Cuál es la correspondiente partición de **Z** ?

Para n = 2

$[0] = \{ y \in Z / y - 0 = k2 ,\ k \in Z \} = \{ \ldots -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, -8, \ldots \}$

$[1] = \{ y \in Z / y -1 = 2k ,\ k \in Z \}$

$= \{ y \in Z / y = 2k + 1,\ k \in Z \}$

$= \{ \ldots -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9 \ldots \}$

$Z/\equiv_2 = \{[0], [1]\}$ es la partición de ***Z.*** $[0] \cup [1] = \boldsymbol{Z}$

Para n = 3

$[0] = \{ y \in Z / y - 0 = 3k ,\ k \in Z \} = \{ y \in Z / y = 3k ,\ k \in Z \}$

$= \{ \ldots -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots \}$

$[1] = \{ y \in Z / y -1 = 3k ,\ k \in Z \} = \{ y \in Z / y = 3k +1 ,\ k \in Z \}$

$= \{ \ldots -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \ldots \}$

$[2] = \{ y \in Z / y -2 = 3k ,\ k \in Z \} = \{ y \in Z / y = 3k + 2,\ k \in Z \}$

$= \{ \ldots -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \ldots \}$

$[0] \cup [1] \cup [2] = \mathbf{Z}$

$[0] = \{ \ldots -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots \}$

$[1] = \{ \ldots -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \ldots \}$

$[2] = \{ \ldots -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \ldots \}$

$\boldsymbol{Z} /\equiv_3 = \{[0], [1], [2]\}$

Para $n = 4$

$[0] = \{ y \in Z / y - 0 = 4k ,\ k \in Z \} = \{ y \in Z / y = 4k ,\ k \in Z \}$

$= \{ \ldots -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, \ldots \}$

$[1] = \{ y \in Z / y -1 = 4k ,\ k \in Z \} = \{ y \in Z / y = 4k +1 ,\ k \in Z \}$

$= \{ \ldots -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, 17, \ldots \}$

$[2] = \{ y \in Z / y -2 = 4k ,\ k \in Z \} = \{ y \in Z / y = 4k + 2,\ k \in Z \}$

$= \{ \ldots -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, 18, \ldots \}$

$[3] = \{ y \in Z / y -3 = 4k ,\ k \in Z \} = \{ y \in Z / y = 4k +3,\ k \in Z \}$

$= \{ \ldots -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, 19, \ldots \}$

$[0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] = \boldsymbol{Z}$

$[0] = \{ \ldots -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, \ldots \}$
$[1] = \{ \ldots -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, \ldots \}$
$[2] = \{ \ldots -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, \ldots \}$
$[3] = \{ \ldots -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, \ldots \}$

En general:

$\boldsymbol{Z}/\equiv_n = \{[0], [1], [2], \ldots, [n-1]\}$

Se acostumbra la notación de $\boldsymbol{Z}_n$ por $\boldsymbol{Z}/\equiv_n$.

6 (i) . Sea $f : A \mapsto B$ una función .
f es inyectiva y $\{A_i\}_{i\in I}$ una partición de $A \Rightarrow \{ \vec{f} A_i \}_{i\in I}$ partición de $\vec{f}$ A.

ELD

Demostrar $\{ \vec{f} A_i \}_{i\in I}$ partición de $\vec{f}$ A.

Traducción : (i) $\vec{f} A_i \subseteq \vec{f}$ A (iii) $\bigcup_{i\in I} \vec{f} A_i = \vec{f}$ A

(ii) $\vec{f} A_i \neq \phi$ (iv) $i \neq j \Rightarrow \vec{f} A_i \cap \vec{f} A_j = \phi$

(1)	***f* es inyectiva**	**P**
(2)	**$\{A_i\}_{i\in I}$ una partición de *A***	**P**

6(i) **ELD**$_1$

Demostrar $\vec{f} A_i \subseteq \vec{f}$ A

Traducción : $y \in \vec{f} A_i \Rightarrow y \in \vec{f}$ A

(1)	***f* es inyectiva**	**P**
(2)	**$\{A_i\}_{i\in I}$ una partición de *A***	**P**
(3)	$y \in \vec{f} A_i$	P
(4)	$\exists x \in A_i : y = fx$	I 3,3.15
(5)	$A_i \subseteq A$	2
(6)	$x \in A$	I 4,5

(7)	$y \in \vec{f}$ A	6,4,3.15
(8) $y \in \vec{f} A_i \Rightarrow y \in \vec{f}$ A		CP 3,7
□ (9) $\vec{f} A_i \subseteq \vec{f}$ A		traducción 8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{f} A_i \subseteq \vec{f}$ A.

(3) Sea $y \in \vec{f} A_i$. **(4)** Entonces existe $x \in A_i$ *tal que* $y = fx$ (3.15). **(5)** Como $A_i \subseteq A$ debido a que $\{A_i\}_{i \in I}$ una partición de *A*, **(6)** $x \in A$.**(7)(8)(9)**Entonces $y \in \vec{f}$ A (3.15).

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{f} A_i \subseteq \vec{f}$ A.

Sea $y \in \vec{f} A_i$. Entonces existe $x \in A_i$ *tal que* $y = fx$ (3.15). Como $A_i \subseteq A$ debido a que $\{A_i\}_{i \in I}$ una partición de *A*, $x \in A$. Entonces $y \in \vec{f}$ A (3.15).

6(i) **ELD** $_2$

Demostrar $\vec{f} \boldsymbol{A}_i \neq \phi$

(1)	***f* es inyectiva**	**P**
(2)	$\{A_i\}_{i \in I}$ **una partición de *A***	**P**
(3)	$A_i \neq \phi$	2
(4)	$\exists x \in A_i$	I 3,1.6(ii)
(5)	$y = fx \in \vec{f} A_i$	I 4,3.15
□ (6)	$\vec{f} A_i \neq \phi$	I 4,5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{f} A_i \neq \phi$.

(3)$A_i \neq \phi$ debido a que $\{A_i\}_{i \in I}$ una partición de A. **(4)** Esto quiere decir que existe $x \in A_i$ **(5)** y $y = fx \in \vec{f} A_i$ **(6)**o sea $\vec{f} A_i \neq \phi$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{f}\,A_i \neq \phi$. $A_i \neq \phi$ debido a que $\{A_i\}_{i\in I}$ una partición de A. Esto quiere decir que existe $x \in A_i$ y $y = fx \in \vec{f}\,A_i$ o sea $\vec{f}\,A_i \neq \phi$.

6(i) **ELD** $_3$

Demostrar: $\bigcup\limits_{i\in I} \vec{f}\,\boldsymbol{A}_i = \vec{f}\,\mathbf{A}$

Traducción : $y \in \bigcup\limits_{i\in I} \vec{f}\,A_i \Leftrightarrow y \in \vec{f}\,\mathrm{A}$

	(1)	***f* es inyectiva**	**P**
	(2)	$\{A_i\}_{i\in I}$ **una partición de *A***	**P**
	(3)	$y \in \bigcup\limits_{i\in I} \vec{f}\,A_i$	P
	(4)	$y \in \vec{f}\,A_i$ p.a. $i \in I$	I 3,4.1
	(5)	$\vec{f}\,A_i \subseteq \vec{f}\,\mathrm{A}$	(i)
	(6)	$y \in \vec{f}\,A$	I 4,5
$\square_1$	(7)	$y \in \bigcup\limits_{i\in I} \vec{f}\,A_i \Rightarrow y \in \vec{f}\,\mathrm{A}$	CP 3,6
	(8)	$y \in \vec{f}\,\mathrm{A}$	P
	(9)	$A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$	2
	(10)	$y \in \vec{f} \bigcup\limits_{i\in I} A_i$	I 5,6
	(11)	$\vec{f} \bigcup\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\limits_{i\in I} \vec{f}\,A_i$	4.7(ii)
	(12)	$y \in \bigcup\limits_{i\in I} \vec{f}\,A_i$	I 8,9
$\square_2$	(13)	$y \in \vec{f}\,\mathrm{A} \Rightarrow y \in \bigcup\limits_{i\in I} \vec{f}\,A_i$	CP 8,12
	(14)	$y \in \bigcup\limits_{i\in I} \vec{f}\,A_i \Leftrightarrow y \in \vec{f}\,\mathrm{A}$	LB 7,13
$\square$	(15)	$\bigcup\limits_{i\in I} \vec{f}\,A_i = \vec{f}\,\mathrm{A}$	traducción 14

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\bigcup_{i\in I} \vec{f} A_i = \vec{f}$ A .

(3) Sea $y\in \bigcup_{i\in I} \vec{f} A_i$.**(4)** Entonces $y\in \vec{f} A_i$ para algún $i \in I$ (4.1). **(5)** Hemos demostrado que $\vec{f} A_i \subseteq \vec{f}$ A, **(6)**entonces $y\in \vec{f} A$. **(7)**Por lo tanto se tiene la implicación

$$y\in \bigcup_{i\in I} \vec{f} A_i \Rightarrow y\in \vec{f} \text{ A} . \quad (\text{ I })$$

(8) Sea ahora $y\in \vec{f}$ A . **(9)**Como $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ **(10)**entonces $y \in \vec{f} \bigcup_{i\in I} A_i$. **(11)**Debido a que $\vec{f} \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} \vec{f} A_i$, **(12)** $y \in \bigcup_{i\in I} \vec{f} A_i$. **(13)**Entonces se cumple la implicación

$$y\in \vec{f} \text{ A} \Rightarrow \; y \in \bigcup_{i\in I} \vec{f} A_i \; . \quad (\text{ II })$$

(14) De (I) y (II) se tiene la equivalencia $y\in \bigcup_{i\in I} \vec{f} A_i \Leftrightarrow y\in \vec{f}$ A **(15)** o sea $\bigcup_{i\in I} \vec{f} A_i = \vec{f}$ A .

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\bigcup_{i\in I} \vec{f} A_i = \vec{f}$ A .

Sea $y\in \bigcup_{i\in I} \vec{f} A_i$. Entonces $y\in \vec{f} A_i$ para algún $i \in I$ (4.1). Hemos demostrado que $\vec{f} A_i \subseteq \vec{f}$ A, entonces $y\in \vec{f} A$. Por lo tanto se tiene la implicación

$$y\in \bigcup_{i\in I} \vec{f} A_i \Rightarrow y\in \vec{f} \text{ A} . \quad (\text{ I })$$

Sea ahora $y\in \vec{f}$ A . Como $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ entonces $y \in \vec{f} \bigcup_{i\in I} A_i$. Debido a que $\vec{f} \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} \vec{f} A_i$, $y \in \bigcup_{i\in I} \vec{f} A_i$. Entonces se cumple la implicación

$$y\in \vec{f} \text{ A} \Rightarrow \; y \in \bigcup_{i\in I} \vec{f} A_i \; . \quad (\text{ II })$$

De (I) y (II) se tiene $y \in \bigcup_{i \in I} \vec{f} A_i \Leftrightarrow y \in \vec{f}$ A o sea $\bigcup_{i \in I} \vec{f} A_i = \vec{f}$ A .

6(i) **ELD** $_4$

Demostrar $i \neq j \Rightarrow \vec{f} A_i \cap \vec{f} A_j = \phi$

(1)	***f* es inyectiva**	**P**
(2)	$\{A_i\}_{i \in I}$ **una partición de *A***	**P**
(3)	$A_i \cap A_j = \phi \quad para\ i \neq j$	2
(4)	$\vec{f}(A_i \cap A_j) = \vec{f} A_i \cap \vec{f} A_j$	I 1,3.22
(5)	$\vec{f} A_i \cap \vec{f} A_j = \vec{f} \phi$	I 3,4
(6)	$\vec{f} \phi = \phi$	Ejercicio 3.3 (2(i))
(7)	$\vec{f} A_i \cap \vec{f} A_j = \phi$ para $i \neq j$	I 5,6
□ (8)	$i \neq j \Rightarrow \vec{f} A_i \cap \vec{f} A_j = \phi$	CP 3,7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $i \neq j \Rightarrow \vec{f} A_i \cap \vec{f} A_j = \phi$.

(2) (3) Debido a que $\{A_i\}_{i \in I}$ una partición de A , $A_i \cap A_j = \phi \quad para\ i \neq j$. **(4)**Puesto que $\vec{f}(A_i \cap A_j) = \vec{f} A_i \cap \vec{f} A_j$ (3.22), **(5)** $\vec{f} \phi = \vec{f} A_i \cap \vec{f} A_j$. **(6)**Por Ejercicio 3.3 (2(i)), $\vec{f} \phi = \phi$ **(7)(8)**y entonces $\vec{f} A_i \cap \vec{f} A_j = \phi$ para $i \neq j$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $i \neq j \Rightarrow \vec{f} A_i \cap \vec{f} A_j = \phi$.

Debido a que $\{A_i\}_{i \in I}$ una partición de A , $A_i \cap A_j = \phi \quad para\ i \neq j$. Puesto que $\vec{f}(A_i \cap A_j) = \vec{f} A_i \cap \vec{f} A_j$ (3.22), $\vec{f} \phi = \vec{f} A_i \cap \vec{f} A_j$. Por Ejercicio 3.3 (2(i)), $\vec{f} \phi = \phi$ y entonces $\vec{f} A_i \cap \vec{f} A_j = \phi$ para $i \neq j$.

Para la parte (ii) se requiere demostrar primero la proposición :

$\{B_i\}_{i\in I}$ partición de $\overrightarrow{f}$ A $\Rightarrow \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A \subseteq A$

ELD

Demostrar: $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A \subseteq A$

Traducción : $x \in \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A \Rightarrow x \in A$

(1)	$\{B_i\}_{i\in I}$ **partición de** $\overrightarrow{f}$ **A**	**P**
(2)	$x \in \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A$	P
(3)	$\bigcup_{i\in I} B_i = \overrightarrow{f}A$	1
(4)	$\overleftarrow{f}\bigcup_{i\in I} B_i = \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A$	3
(5)	$\overleftarrow{f}\bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I}\overleftarrow{f}B_i$	4.7 (iv)
(6)	$\bigcup_{i\in I}\overleftarrow{f}B_i = \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A$	I 4,5
(7)	$x \in \bigcup_{i\in I}\overleftarrow{f}B_i$	I 2,6
(8)	$x \in \overleftarrow{f}B_i \quad p.a.i \in I$	7
(9)	$fx \in B_i$	I 8,3.15
(10)	$fx \in \overrightarrow{f}A$	9,1
(11)	$x \in A$	I 10,3.15
(12)	$x \in \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A \Rightarrow x \in A$	CP 2,11
□ (13)	$\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A \subseteq A$	traducción 12

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A \subseteq A$.

(2) Sea $x \in \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A$. **(3)** Como $\{B_i\}_{i\in I}$ es una partición de $\overrightarrow{f}$ A entonces $\bigcup_{i\in I} B_i = \overrightarrow{f}A$ **(4)** y $\overleftarrow{f}\bigcup_{i\in I} B_i = \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A$. **(5)**Debido a que $\overleftarrow{f}\bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I}\overleftarrow{f}B_i$ (4.7(iv)),

(6) $\bigcup_{i\in I}\overleftarrow{f}B_i = \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A$ **(7)** y por lo tanto $x\in\bigcup_{i\in I}\overleftarrow{f}B_i$, **(8)**lo cual implica que $x\in\overleftarrow{f}B_i$ para algún $i\in I$ **(9)**o sea $fx\in B_i$ (3.15).

(10) Como $\{B_i\}_{i\in I}$ es una partición de $\overrightarrow{f}$ A , $fx\in\overrightarrow{f}A$ **(11)** y $x\in A$ (3.15), **(12)**cumpliéndose la implicación $x\in\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A\Rightarrow x\in A$ **(13)**o sea $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A\subseteq A$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A\subseteq A$.

Sea $x\in\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A$. Como $\{B_i\}_{i\in I}$ es una partición de $\overrightarrow{f}$ A entonces $\bigcup_{i\in I}B_i = \overrightarrow{f}A$ y $\overleftarrow{f}\bigcup_{i\in I}B_i = \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A$. Debido a que $\overleftarrow{f}\bigcup_{i\in I}B_i = \bigcup_{i\in I}\overleftarrow{f}B_i$ (4.7(iv)), $\bigcup_{i\in I}\overleftarrow{f}B_i = \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A$ y por lo tanto $x\in\bigcup_{i\in I}\overleftarrow{f}B_i$, lo cual implica que $x\in\overleftarrow{f}B_i$ para algún $i\in I$ o sea $fx\in B_i$ (3.15). Como $\{B_i\}_{i\in I}$ es una partición de $\overrightarrow{f}$ A , $fx\in\overrightarrow{f}A$ y $x\in A$ (3.15), cumpliéndose la implicación $x\in\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A\Rightarrow x\in A$ o sea $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A\subseteq A$.

6 (ii). Sea $f : A\mapsto$ B una función .

$\{B_i\}_{i\in I}$ es una partición de $\overrightarrow{f}$ A $\Rightarrow$ $\{\overleftarrow{f}\,B_i\}_{i\in I}$ es una partición de A **.**

ELD

Demostrar : $\{\overleftarrow{f}\,B_i\}_{i\in I}$ es una partición de A .

Traducción: (i) $\overleftarrow{f}B_i\subseteq A$ (ii) $\overleftarrow{f}B_i\neq\phi$

(iii) $\bigcup_{i\in I}\overleftarrow{f}B_i = A$ (iv) $\overleftarrow{f}B_i\cap\overleftarrow{f}B_j=\phi$

(1)	$\{B_i\}_{i\in I}$ **partición de** $\overrightarrow{f}$ **A**	**P**

ELD$_1$

Demostrar : $\overleftarrow{f}B_i\subseteq A$

(1)	$\{B_i\}_{i\in I}$ **partición de** $\overrightarrow{f}$ **A**	**P**
(2)	$\bigcup_{i\in I}B_i = \overrightarrow{f}A$	1

(3) $B_i \subseteq \overrightarrow{f} A$ 2

(4) $\overleftarrow{f} B_i \subseteq \overleftarrow{f}\, \overrightarrow{f} A$ I 3, Ejercicio 3.3(3(ii))

(5) $\overleftarrow{f}\, \overrightarrow{f} A \subseteq A$ P

□ (6) $\overleftarrow{f} B_i \subseteq A$ 4,5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overleftarrow{f} B_i \subseteq A$.

(1) (2)(3) Debido a que $\{B_i\}_{i\in I}$ es una partición de $\overrightarrow{f}$ A , $\bigcup_{i\in I} B_i = \overrightarrow{f} A$ y por lo tanto $B_i \subseteq \overrightarrow{f} A$.**(4)**Esto implica que $\overleftarrow{f} B_i \subseteq \overleftarrow{f}\, \overrightarrow{f} A$ por Ejercicio 3.3 (3(ii)). **(5)**Se demostró que $\overleftarrow{f}\, \overrightarrow{f} A \subseteq A$ **(6)**por lo tanto $\overleftarrow{f} B_i \subseteq A$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overleftarrow{f} B_i \subseteq A$.

Debido a que $\{B_i\}_{i\in I}$ es una partición de $\overrightarrow{f}$ A , $\bigcup_{i\in I} B_i = \overrightarrow{f} A$ y por lo tanto $B_i \subseteq \overrightarrow{f} A$. Esto implica que $\overleftarrow{f} B_i \subseteq \overleftarrow{f}\, \overrightarrow{f} A$ por Ejercicio 3.3 (3(ii)). Se demostró que $\overleftarrow{f}\, \overrightarrow{f} A \subseteq A$ por lo tanto $\overleftarrow{f} B_i \subseteq A$.

ELD $_2$

Demostrar : $\overleftarrow{f} B_i \neq \phi$

(1) $\{B_i\}_{i\in I}$ **partición de** $\overrightarrow{f}$ **A** **P**

(2) $B_i \neq \phi$ 1

(3) $y \in B_i : y = fx$ I 2,1.6(ii),1

(4) $x \in \overleftarrow{f} B_i$ I 3,3.15

□ (5) $\overleftarrow{f} B_i \neq \phi$ I 4,1.6(ii)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overleftarrow{f} B_i \neq \phi$.

(1) Puesto que $\{B_i\}_{i\in I}$ es una partición de $\vec{f}$ A , **(2)** $B_i \neq \phi$, **(3)**lo cual implica que existe un $y \in B_i$ tal que $y = fx$; **(4)**de donde $x \in \overset{\leftarrow}{f} B_i$ (3.15) **(5)** o sea $\overset{\leftarrow}{f} B_i \neq \phi$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overset{\leftarrow}{f} B_i \neq \phi$.

Puesto que $\{B_i\}_{i\in I}$ es una partición de $\vec{f}$ A , $B_i \neq \phi$, lo cual implica que existe un $y \in B_i$ tal que $y = fx$; de donde $x \in \overset{\leftarrow}{f} B_i$ (3.15) o sea $\overset{\leftarrow}{f} B_i \neq \phi$.

ELD $_3$

Demostrar: $\bigcup_{i\in I} \overset{\leftarrow}{f} B_i = A$

(1)	$\{B_i\}_{i\in I}$ **partición de** $\vec{f}$ **A**	**P**
(2)	$\bigcup_{i\in I} B_i = \vec{f} A$	1
(3)	$\overset{\leftarrow}{f} \bigcup_{i\in I} B_i = \overset{\leftarrow}{f}\, \vec{f} A$	2
(4)	$\overset{\leftarrow}{f} \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I} \overset{\leftarrow}{f} B_i$	4.7(iv)
(5)	$\bigcup_{i\in I} \overset{\leftarrow}{f} B_i = \overset{\leftarrow}{f}\, \vec{f} A$	I 3,4
(6)	$\overset{\leftarrow}{f}\, \vec{f} A \subseteq A$	P
(7)	$A \subseteq \overset{\leftarrow}{f}\, \vec{f} A$	Ejercicio 3.3(6(i))
(8)	$\overset{\leftarrow}{f}\, \vec{f} A = A$	6,7
□ (9)	$\bigcup_{i\in I} \overset{\leftarrow}{f} B_i = A$	I 5,8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\bigcup_{i\in I} \overset{\leftarrow}{f} B_i = A$.

(1) Por ser $\{B_i\}_{i\in I}$ partición de $\vec{f}$ A,**(2)** $\bigcup_{i\in I} B_i = \vec{f} A$ **(3)**y $\overset{\leftarrow}{f} \bigcup_{i\in I} B_i = \overset{\leftarrow}{f}\, \vec{f} A$.**(4)** Como $\overset{\leftarrow}{f} \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I} \overset{\leftarrow}{f} B_i$, **(5)** entonces $\bigcup_{i\in I} \overset{\leftarrow}{f} B_i = \overset{\leftarrow}{f}\, \vec{f} A$.

(6) (7) (8) (9) Como $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A = A$ (se demostró $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A \subseteq A$ y por Ejercicio 3.3(6(i)), $A \subseteq \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A$), entonces $\bigcup\limits_{i\in I} \overleftarrow{f}B_i = A$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\bigcup\limits_{i\in I} \overleftarrow{f}B_i = A$.

Por ser $\{B_i\}_{i\in I}$ partición de $\overrightarrow{f}$ A , $\bigcup\limits_{i\in I} B_i = \overrightarrow{f}A$ y $\overleftarrow{f}\bigcup\limits_{i\in I} B_i = \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A$.Como $\overleftarrow{f}\bigcup\limits_{i\in I} B_i = \bigcup\limits_{i\in I}\overleftarrow{f}B_i$, **(5)**entonces $\bigcup\limits_{i\in I}\overleftarrow{f}B_i = \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A$. Como $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A = A$ (se demostró $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A \subseteq A$ y por Ejercicio 3.3(6(i)) $A \subseteq \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}A$), entonces $\bigcup\limits_{i\in I}\overleftarrow{f}B_i = A$.

ELD $_4$

Demostrar $i \neq j \Rightarrow \overleftarrow{f}\boldsymbol{B}_i \cap \overleftarrow{f}\boldsymbol{B}_j = \phi$

(1)	$\{B_i\}_{i\in I}$ **partición de** $\overrightarrow{f}$ **A**	**P**
(2)	$B_i \cap B_j = \phi \quad para\ i \neq j$	1
(3)	$\overleftarrow{f}(B_i \cap B_j) = \overleftarrow{f}B_i \cap \overleftarrow{f}B_j$	3.19(iv)
(4)	$\overleftarrow{f}\phi = \overleftarrow{f}B_i \cap \overleftarrow{f}B_j$	I 2,3
(5)	$\overleftarrow{f}\phi = \phi$	Ejercicio 3.3 (2(ii))
(6)	$\overleftarrow{f}B_i \cap \overleftarrow{f}B_j = \phi \quad para\ i \neq j$	I 4,5
□ (7)	$i \neq j \Rightarrow \overleftarrow{f}B_i \cap \overleftarrow{f}B_j = \phi$	traducción 6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $i \neq j \Rightarrow \overleftarrow{f}B_i \cap \overleftarrow{f}B_j = \phi$.

(1) Como $\{B_i\}_{i\in I}$ partición de $\overrightarrow{f}$ A , **(2)**entonces $B_i \cap B_j = \phi \quad para\ i \neq j$. **(3)(4)** Debido a que $\overleftarrow{f}(B_i \cap B_j) = \overleftarrow{f}B_i \cap \overleftarrow{f}B_j$ (3.19(iv)), $\overleftarrow{f}\phi = \overleftarrow{f}B_i \cap \overleftarrow{f}B_j$. **(5)**Pero $\overleftarrow{f}\phi = \phi$ (Ejercio3.3(2(ii)))**(6)(7)**Luego $\overleftarrow{f}B_i \cap \overleftarrow{f}B_j = \phi \quad para\ i \neq j$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $i \neq j \Rightarrow \overleftarrow{f} B_i \cap \overleftarrow{f} B_j = \phi$.

Como $\{B_i\}_{i \in I}$ partición de $\overrightarrow{f}$ A , entonces $B_i \cap B_j = \phi \quad para\ i \neq j$. Debido a que $\overleftarrow{f}(B_i \cap B_j) = \overleftarrow{f} B_i \cap \overleftarrow{f} B_j$ (3.19(iv)), $\overleftarrow{f} \phi = \overleftarrow{f} B_i \cap \overleftarrow{f} B_j$. Pero $\overleftarrow{f} \phi = \phi$ (Ejercicio 3.3(2(ii))) Luego $\overleftarrow{f} B_i \cap \overleftarrow{f} B_j = \phi \quad para\ i \neq j$

7. Sea *R, S* relaciones de equivalencia en A . Si $R \subseteq S$ se dice que R es un refinamiento de *S* .

(i) *R* refinamiento de $S \Rightarrow \forall x \in A(\,[x]_R \subseteq [x]_S\,)$.

ELD

Demostrar: $\forall x \in A(\,[x]_R \subseteq [x]_S\,)$

Traducción : $y \in [x]_R \Rightarrow y \in [x]_S$

(1)	***R, S* relaciones de equivalencia en A**	**P**
(2)	***R* refinamiento de *S***	**P**
(3)	$y \in [x]_R$	P
(4)	yRx	I 3,5.4
(5)	$(y, x) \in R$	4
(6)	$R \subseteq S$	2
(7)	$(y, x) \in S$	5,6
(8)	ySx	traducción 7
(9)	$y \in [x]_S$	I 8,5.4
(10)	$y \in [x]_R \Rightarrow y \in [x]_S$	CP 3,9
□ (11)	$[x]_R \subseteq [x]_S$	traducción 10

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\forall x \in A(\,[x]_R \subseteq [x]_S\,)$.

(3) Sea $y \in [x]_R$. **(4)** Entonces yRx (5.4). **(5)** Es decir $(y, x) \in R$. **(6) (7)** Como $R \subseteq S$ debido a que *R* es un refinamiento de *S*, $(y, x) \in S$ **(8)** esto es ySx **(9)** **(10)(11)**o sea $y \in [x]_S$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\forall x \in A(\,[x]_R \subseteq [x]_S\,)$.

Sea $y \in [x]_R$. Entonces yRx (5.4). Es decir $(y, x) \in R$. Como $R \subseteq S$ debido a que R es un refinamiento de S, $(y, x) \in S$ esto es ySx o sea $y \in [x]_S$.

7. Sea R, S relaciones de equivalencia en A . Si $R \subseteq S$ se dice que R es un refinamiento de S .

Siendo R un refinamiento de S definimos : $S/R = \{([x]_R , [y]_R) \,/\, xSy\}$

(ii) R refinamiento de $S \Rightarrow S/R$ relación de equivalencia en A/R .

ELD

Demostrar: S/R relación de equivalencia en A/R

Traducción : S/R reflexiva (2) S/R simétrica (3) S/R transitiva

	(1)	**R, S relaciones de equivalencia en A**	**P**
	(2)	**R refinamiento de S**	**P**
	(3)	$xSx \ \forall x \in A$	1 (S reflex.)
	(4)	$([x]_R , [x]_R) \in S/R$	2,3
□$_1$	(5)	S/R es reflexiva	4
	(6)	$([x]_R , [y]_R) \in S/R$	P
	(7)	xSy	6
	(8)	ySx	I 7,1(S simét.)
	(9)	$([y]_R , [x]_R) \in S/R$	8
	(10)	$([x]_R , [y]_R) \in S/R \Rightarrow ([y]_R , [x]_R) \in S/R$	CP 6,9
□$_2$	(11)	S/R es simétrica	traducción 10
	(12)	$([x]_R , [y]_R) \in S/R \wedge ([y]_R , [z]_R) \in S/R$	P
	(13)	$xSy \wedge ySz$	12
	(14)	xSz	I 13,1(S tr.)
	(15)	$([x]_R , [z]_R) \in S/R$	14
	(16)	$([x]_R , [y]_R) \in S/R \wedge ([y]_R , [z]_R) \in S/R \Rightarrow ([x]_R , [z]_R) \in S/R$	CP 12,15
□$_3$	(17)	S/R es transitiva	traducción 16
□	(18)	S/R es relación de equivalencia	5,11,17

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que S/R es relación de equivalencia en A/R .

(3)$xSx \ \forall x \in A$ debido a que S es de equivalencia, en particular es reflexiva . **(4)**Como R es un refinamiento de S, $([x]_R , [x]_R) \in S/R$. **(5)**Pero esto quiere decir que S/R es reflexiva .

(6) Ahora sea $([x]_R, [y]_R) \in S/R$. **(7)**Pero esto quiere decir que xSy . **(8)**Como S es simétrica ySx **(9)**y esto significa que $([y]_R, [x]_R) \in S/R$ **(10)(11)**o sea que S/R es simétrica. Finalmente probaremos que S/R es transitiva.

(12) Sea $([x]_R, [y]_R) \in S/R \wedge ([y]_R, [z]_R) \in S/R$.

(13) Entonces $xSy \wedge ySz$. **(14)**Como S es transitiva xSz **(15)**pero esto significa que $([x]_R, [z]_R) \in S/R$. **(16) (17)(18)**Por lo tanto S/R es transitiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que S/R es relación de equivalencia en A/R .

$xSx \ \forall x \in A$ debido a que S es de equivalencia, en particular es reflexiva. Como Res un refinamiento de S, $([x]_R, [x]_R) \in S/R$. Pero esto quiere decir que S/R es reflexiva .

Ahora sea $([x]_R, [y]_R) \in S/R$. Pero esto quiere decir que xSy . Como S es simétrica ySx y esto significa que $([y]_R, [x]_R) \in S/R$ o sea que S/R es simétrica.

Finalmente probaremos que S/R es transitiva.

Sea

$$([x]_R, [y]_R) \in S/R \wedge ([y]_R, [z]_R) \in S/R .$$

Entonces

$$xSy \wedge ySz.$$

Como S es transitiva,

$$xSz ;$$

pero esto significa que

$$([x]_R, [z]_R) \in S/R .$$

Por lo tanto S/R es transitiva.

8. Sean R, S relaciones de equivalencia en A .

(i) $\forall x \in A \ [x]_{R \cap S} = [x]_R \cap [x]_S$

ELD

Demostrar: $\forall x \in A \ [x]_{R\cap S} = [x]_R \cap [x]_S$

Traducción : $y \in [x]_{R\cap S} \Leftrightarrow y \in [x]_R \cap [x]_S$

(1) *R, S* relaciones de equivalencia en A **P**

$y \in [x]_{R\cap S} \Leftrightarrow yR\cap Sx$ 5.4

$\Leftrightarrow (y,x) \in R\cap S$

$\Leftrightarrow (y,x) \in R \wedge (y,x) \in S$ 1.11(i)

$\Leftrightarrow y\in[x]_R \wedge y\in [x]_S$ 5.4

$\Leftrightarrow y\in[x]_R \cap [x]_S$ 1.11(i)

9. Toda función induce una relación de equivalencia en su dominio :

Sea $f : A \mapsto B$ una función . Definimos $xRy \Leftrightarrow fx = fy$

(i) *R* es una relación de equivalencia en *A*.

ELD

Demostrar: *R* relación de equivalencia en *A*

Traducción : *R* es reflexiva, simétrica y transitiva

(1) $f : A \mapsto B$ **una función** **P**

(2) $xRy \Leftrightarrow fx = fy$ **P**

(3) $xRx \ \forall x \in A$ x/y 2

$\square_1$ (4) *R* es reflexiva 3

(5) xRy P

(6) $fx = fy$ 5,2

(7) $fy = fx$ 6

(8) yRx 2,7

(9) $xRy \Rightarrow yRx$ CP 5,8

$\square_2$ (10) *R* es simétrica traducción 8

(11) $xRy \wedge yRz$ P

(12) $fx = fy \wedge fy = fz$ 11,2

(13) $fx = fz$ 12

(14) xRz 13,2

(15) $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ CP 11,14

$\square_3$ (16) *R* es transitiva traducción 15

(17) R es reflexiva, simétrica y transitiva 4,10,16

□ (18) R es relación de equivalencia 17

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que R es una relación de equivalencia en A.

(1) (2)(3) (4) Debido a que $fx = fx$, xRx $\forall x \in A$. Es decir R es reflexiva. **(5)**Sea xRy . **(6)**Entonces $fx = fy$, por definición de R . **(7)** De donde $fy = fx$ **(8)**y yRx. **(9)(10)**Así que R es simétrica .

(11) Supongamos ahora que xRy y yRz . **(12)**Entonces $fx = fy$ y $fy = fz$ (por definición de R); **(13)**de donde $fx = fz$ **(14)** o sea xRz . **(15)(16)** Por lo tanto R es transitiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que R es una relación de equivalencia en A.

Debido a que $fx = fx$, entonces xRx $\forall x \in A$. Esto quiere decir que R es reflexiva.

Sea xRy . Entonces $fx = fy$, por definición de R . De donde $fy = fx$ y yRx.

Así que R es simétrica .

Supongamos ahora que xRy y yRz . Entonces $fx = fy$ y $fy = fz$ (por definición de R); de donde $fx = fz$ o sea xRz . Por lo tanto R es transitiva.

(ii) **ELD**

Demostrar: $s : A/R \mapsto \vec{f}\, A$ es una biyección

Traducción : s es inyectiva y sobreyectiva

(1)	**R relación de equivalencia inducida por $f : A \mapsto B$**	**P**
(2)	**$s[x] = fx$ para cada $s[x] \in A/R$**	**P**
(3)	$s[x_1] = s[x_2]$	P
(4)	$fx_1 = fx_2$	2,3
(5)	$x_1 R x_2$	1,4
(6)	$[x_1] = [x_2]$	I 5, 5.5(ii)
(7)	$s[x_1] = s[x_2] \Rightarrow [x_1] = [x_2]$	CP 3,6

□₁ (8)	*s* es inyectiva		I 7,3.21(i)
(9)		$y \in \vec{f} A$	P
(10)		$\exists x \in A : y = fx$	I 9,3.15
(11)		$s[x] = y$	I 2,10
(12)		$\forall\ y \in \vec{f} A\ \ \exists [x] \in A/R : y = s[x]$	9,11
□₂ (13)	*s* es sobreyectiva		traducción 12
(14)	s es inyectiva y sobreyectiva		A 8,13
□ (15)	s es biyectiva		traducción 14

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $s : A/R \ \mapsto\ \vec{f} A$ es una biyección .

3)Supongamos que $s[x_1] = s[x_2]$. **(4)** Por definición de *s*, $fx_1 = fx_2$. **(5)**Por definición de *R*, $x_1 R x_2$, **(6)**pero esto significa que $[x_1] = [x_2]$ (5.5(ii)). **(7)**Entonces se tiene la implicación

$$s[x_1] = s[x_2] \ \Rightarrow\ [x_1] = [x_2]\ ,$$

(8)que quiere decir que *s* es inyectiva.

(9) Sea $y \in \vec{f} A$. **(10)**Entonces existe $x \in A : y = fx$ (3.15). **(11)** Esto es $s[x] = y$ (Definición de *s*). **(12)**Así que para todo $y \in \vec{f} A$ existe $[x] \in A/R$: y = $s[x]$.

(13) Por lo tanto *s* es sobreyectiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $s : A/R \ \mapsto\ \vec{f} A$ es una biyección .

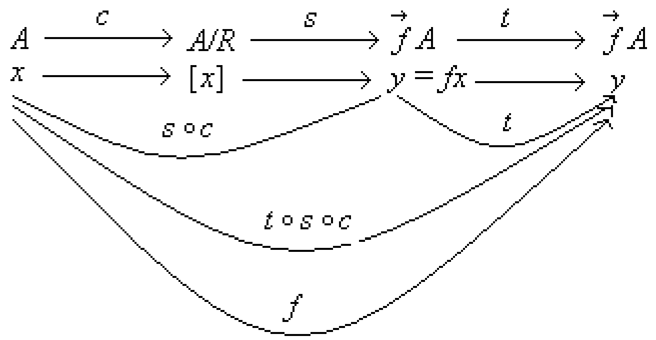
Supongamos que $s[x_1] = s[x_2]$. Por definición de *s*, $fx_1 = fx_2$. Por definición de *R*, $x_1 R x_2$, pero esto significa que $[x_1] = [x_2]$ (5.5(ii)). Entonces se tiene la implicación

$$s[x_1] = s[x_2] \ \Rightarrow\ [x_1] = [x_2]\ ,$$

que quiere decir que *s* es inyectiva.

Sea $y \in \vec{f} A$. Entonces existe $x \in A : y = fx$ (3.15). Esto es $s[x] = y$ (Definición de *s*). Así que para todo $y \in \vec{f} A$ existe $[x] \in A/R$: y = $s[x]$. Por lo tanto *s* es sobreyectiva.

9 (iii). $f = t \circ s \circ c$



ELD

Demostrar: $f = t \circ s \circ c$

Traducción : $f(x) = (t \circ s \circ c)(x) \quad \forall x \in A$

(1)	$\boldsymbol{f : A \mapsto B \wedge xRy \Leftrightarrow fx = fy}$	**P**
(2)	$\boldsymbol{c : A \mapsto A/R : cx = [x]_R}$	**P**
(3)	$\boldsymbol{s : A/R \mapsto \vec{f} A : s[x] = fx}$	**P**
(4)	$(t \circ s \circ c)(x) = (t \circ s)(cx)$	P
	$= (t \circ s)([x])$	2
	$= t(s[x])$	
	$= t(fx)$	3
	$= fx$	Def. *t*
□ (5)	$f = t \circ s \circ c$	I 4,3.4

BIBLIOGRAFIA

GUARIN Vasquez Hugo INTRODUCCION AL SIMBOLISMO LOGICO

MARIÑO Sarmiento Rafael TEORIA DE CONJUNTOS . Editor YU TAKEUCHI 1973

MUÑOZ Q. José M. INTRODUCCION A LA TEORIA DE CONJUNTOS. Departamento de Matemáticas y Estadística 1983

ROJAS Cardozo, Moisés EL ELD : El Andamio en la Zona de Desarrollo Próximo para el Desarrollo Intelectual Superior en Matemáticas.